UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2003 N° B.U. :

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Nader YEGANEFAR

le 5 Novembre 2003

à l'Université de Nantes

Titre

FORMES HARMONIQUES L^2 SUR LES VARIÉTÉS À COURBURE NÉGATIVE

Jury

Président	:	Laurent GUILLOPÉ	Professeur (Nantes)
Rapporteurs	:	Rafe MAZZEO	Professeur (Stanford)
		Pierre PANSU	Professeur (Paris-Sud)
Examinateurs	:	Gilles COURTOIS	D.R. du CNRS (Ecole Polytechnique)
		Marc HERZLICH	Maître de Conférences (Montpellier)
		François LAUDENBACH	Professeur (Nantes)
		Pierre PANSU	Professeur (Paris-Sud)

Directeur de Thèse	**:**	**Gilles CARRON**
Laboratoire	:	Jean Leray (UMR 6629 CNRS/UN)
Composante	:	Faculté des Sciences et Techniques
N° E.D. : 0366−		

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude envers Gilles Carron. Préparer une thèse sous sa direction aura été pour moi une expérience très riche mathématiquement et humainement. Pour son enthousiasme permanent et sa générosité, je le remercie.

Je tiens ensuite à remercier Rafe Mazzeo d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. De même, je remercie Pierre Pansu pour ses commentaires sur ce travail, et pour sa présence dans mon jury.

Je suis aussi très honoré que Gilles Courtois, Laurent Guillopé, Marc Herzlich et François Laudenbach aient bien voulu se joindre à ce jury.

Mes pensées se tournent ensuite vers tous les membres du département de mathématiques de l'Université de Nantes qui m'ont accompagné et soutenu pendant plus de trois ans. En particulier, les autres thésards ont joué un rôle non négligeable dans l'aboutissement de ce travail.

Enfin, une partie de cette thèse a été rédigée alors que j'étais invité à la Humboldt Universität de Berlin durant l'hiver 2003. Je tiens donc à remercier Jochen Brüning et toute son équipe, notamment George Marinescu, de m'avoir acueilli à Berlin.

à ma tante Azar

Table des matières

Introduction

Soit (M,g) une variété riemannienne. On note par $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des $k-$formes différentielles harmoniques L^2 sur M, c'est-à-dire celles qui sont de carré intégrable, fermées et cofermées. Lorsque M est compacte, on sait, grâce au théorème de Hodge-de Rham, que cet espace est de dimension finie, et isomorphe au k-ème espace de cohomologie réelle de M. Quand M n'est pas compacte, il est naturel de se demander ce qui subsiste de ce résultat :

i) Est-ce que l'espace $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie ?

ii) Et si oui, peut-on en donner une interprétation topologique ?

Il n'existe bien entendu pas de théorie générale permettant de répondre à ces questions, même s'il y a déjà de nombreuses situations où ce problème a été résolu : voir par exemple les travaux d'Atiyah, Patodi, Singer [A-P-S] sur les variétés à bouts cylindriques, de S. Zucker [Z1] sur les espaces localement symétriques, de R. Mazzeo [M, M-P] sur les variétés (asymptotiquement) hyperboliques géométriquement finies, de G. Carron [C4] sur les variétés plates à l'infini, etc... On connait aussi des cas où on sait que $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie, sans pour autant savoir en donner une interprétation topologique. Par exemple, d'après J. Lott [L3], si M est une variété complète de volume fini, à courbure sectionnelle K négative et pincée (i.e. il existe des réels $0 < a \leq b$, avec $-b^2 \leq K \leq -a^2$), alors tous ses espaces de formes harmoniques sont de dimension finie. La réponse à la question i) est donc positive dans ce cas. Quant à la question ii), elle a été traitée dans les cas hyperboliques (réels ou complexes) [Z1, M-P], mais pas dans le cas général. L'objectif principal de cette thèse, basée en grande partie sur [Y], est d'apporter des réponses à ce problème. Un premier résultat dans cette direction est :

Théorème 1. *Soit (M^n,g), une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini, à courbure sectionnelle K négative pincée : il existe des constantes a et b, telles que l'on ait $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. On suppose que $na-(n-2)b > 0$, alors on a les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :*

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & si\ k < (n-1)/2, \\ \mathrm{Im}(H_c^{n/2}(M) \to H^{n/2}(M)), & si\ k = n/2, \\ H_c^k(M), & si\ k > (n+1)/2. \end{cases}$$

Si de plus la courbure est constante ($a = b$), et la dimension est impaire, alors on a $\mathcal{H}^{(n\pm1)/2}(M) \simeq \mathrm{Im}(H_c^{(n\pm1)/2}(M) \to H^{(n\pm1)/2}(M))$.

Ceci signifie que si la courbure est suffisamment pincée, alors on a une interprétation topologique de $\mathcal{H}^*(M)$. Décrivons très brièvement les ingrédients de la preuve de ce théorème. Tout d'abord, il y a une interprétation de l'espace des formes harmoniques L^2 en termes de L^2-cohomologie (réduite), avec laquelle il est souvent plus souple de travailler. D'un côté, un résultat de J. Lott [L2] affirme que la finitude de la dimension des espaces de L^2-cohomologie ne dépend que de la géométrie à l'infini. Se pose alors le problème de trouver des liens entre la L^2-cohomologie, la géométrie à l'infini et la topologie de la variété. De l'autre côté, lorsque zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien, on sait que l'espace des formes harmoniques L^2 est de dimension finie, et le spectre essentiel ne dépend justement que de la géométrie à l'infini (voir les travaux de Glazman [Gl], Donnelly [Do], Anghel [Ang] ou encore Bär [Ba]). Nous considérons alors une certaine suite reliant la L^2-cohomologie, la topologie et la L^2-cohomologie à l'infini, qui est l'analogue de la suite longue exacte en cohomologie de de Rham. Nous verrons que sur n'importe quelle variété complète, cette suite est exacte si zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien (corollaire 2.8). Un résultat similaire est aussi vrai pour la L^2-cohomologie à poids. Nous exploiterons ceci pour donner une interprétation topologique de certains espaces de L^2-cohomologie à poids des variétés de volume fini, à courbure négative et pincée. Nous y parviendrons en utilisant une formule d'intégration par parties due à Donnely et Xavier [Do-X]. Enfin, pour prouver le théorème 1, il restera à relier L^2-cohomologie et L^2-cohomologie à poids, ce qui sera une application d'une méthode due à Ohsawa [O].

Nous exhiberons également des exemples qui montrent que la conclusion du théorème 1 est fausse si l'on n'impose pas de conditions sur le pincement, et que notre résultat est optimal par rapport à ce pincement. Cependant, les quotients de volume fini de l'espace hyperbolique complexe vérifient la même conclusion que celle de ce théorème (voir [Z1]), sans satisfaire aux hypothèses de courbure. La question est donc de savoir ce qu'on peut dire sur les variétés kählériennes. Notre deuxième résultat y apporte une réponse partielle :

Théorème 2. *Soit (M,g) une variété complète kählérienne de dimension réelle $n=2m$, de volume fini, à courbure sectionnelle K négative pincée $-b^2 \le K \le -a^2 < 0$. Alors on a les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :*

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & si\ k < m-1, \\ H^k_c(M), & si\ k > m+1. \end{cases}$$

De plus, $H^{m-1}(M)$ s'injecte dans $\mathcal{H}^{m-1}(M)$ et $H_c^{m+1}(M)$ se surjecte dans $\mathcal{H}^{m+1}(M)$.

La preuve de ce théorème repose en grande partie sur des idées développées par Gromov [Gro].

Le plan de cette thèse est le suivant : dans une première partie, nous décrivons des propriétés bien connues des espaces de formes harmoniques L^2 et de leurs liens avec la L^2-cohomologie. Dans la deuxième partie, nous montrons d'abord comment, sous l'hypothèse que zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien, on peut obtenir, sous la forme d'une suite exacte, des liens entre la L^2-cohomologie, la géométrie à l'infini, et la topologie. Nous exposons ensuite la formule de Donnelly et Xavier [Do-X] et donnons des exemples d'application (voir aussi [B-B1]). En combinant les méthodes développées dans cette partie, nous donnons, dans un troisième temps, les premiers calculs de L^2-cohomologie pour certaines géométries. Ceci inclut des preuves plus simples des résultats de Zucker [Z1] et Mazzeo et Philipps [M-P] sur les variétés hyperboliques de volume fini, ainsi que des résultats de Mazzeo sur les variétés conformément compactes [M] et des calculs partiels pour les variétés asymptotiquement hyperboliques complexes. Nous obtiendrons également une généralisation d'un théorème d'Ahmed et Stroock [A-S], en montrant

Théorème 3. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de dimension n. On suppose qu'il existe une fonction $U : M \to \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :*

1. *U exhauste M,*
2. *il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle qu'en dehors d'un compact, on ait*
$$\varepsilon^2 \leq |\nabla U|^2,$$
3. *il existe deux constantes $C_1 \leq 0$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ telles qu'en dehors d'un compact, le hessien $Hess(U)$ de U vérifie*
$$C_1 |\nabla U|^2 \leq Hess(U) \leq C_2 |\nabla U|^2.$$

Si $1 + nC_1 - 2nC_2 > 0$, alors 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur $d + \delta_U$. De plus, les espaces de L^2-cohomologie à poids de M, associés au poids e^U, sont de dimension finie, et isomorphes aux espaces de cohomologie à support compact de M : $H^*_{2,U}(M) \simeq H^*_c(M)$.

Dans la quatrième partie, nous présentons les travaux d'Ohsawa dont nous avons besoin, en montrant comment ils s'adaptent à notre cadre. La cinquième partie contient essentiellement les preuves des théorèmes 1 et 2. Enfin, dans une dernière partie, nous nous intéresserons à la cohomologie L^p pour $1 \leq p < \infty$. En nous inspirant de techniques développées par P. Pansu [P], nous obtiendrons :

Théorème 4. *Soit M une variété complète de dimension n, de volume fini, à courbure négative et pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Soient $p \geq 1$ un réel, et k un entier. On suppose que $(k-2)(p-1)a - (n-k+1)b > 0$. Alors on a l'isomorphisme $H^k_p(M) \simeq H^k_c(M)$.*

1 Généralités sur les formes harmoniques L^2

Nous rappelons dans cette partie des faits bien connus sur le laplacien et la L^2-cohomologie (voir entre autres [L1, L2], ou [C1, C4]; nous suivrons d'assez près la présentation de [C5]). Les résultats seront par conséquent énoncés (presque) sans preuve.

1.1 Le laplacien

Sur une variété M, on dispose de l'opérateur de différentiation extérieure d, qui agit par exemple sur les formes différentielles lisses à support compact :

$$d : C_0^\infty(\Lambda^k T^*M) \to C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^*M).$$

Si M est munie d'une métrique riemannienne g, on peut définir l'adjoint formel de d, qu'on note δ :

$$\delta : C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^*M) \to C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$$

est caractérisé par la relation

$$\forall \alpha, \beta \in C_0^\infty, \langle \delta\alpha, \beta\rangle_{L^2} = \langle \alpha, d\beta\rangle_{L^2}.$$

Si la variété est orientable, et si $*$ est l'opérateur de Hodge, la relation précédente s'écrit

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^*M),\ \forall \beta \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M),\ \int_M \delta\alpha \wedge *\beta = \int_M \alpha \wedge *d\beta.$$

Le théorème de Stokes donne alors $\delta = (-1)^{nk+1} * d *$, agissant sur les $(k+1)$-formes, avec $n = \dim(\mathrm{M})$.

Définition 1.1. *L'espace $\mathcal{H}^k(M,g)$ des $k-$formes harmoniques L^2 sur (M,g) est*

$$\mathcal{H}^k(M,g) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\, d\alpha = \delta\alpha = 0\},$$

où les équations sont initialement interprétées au sens des distributions.

Remarquons que par régularité elliptique de l'opérateur $d+\delta$, $\mathcal{H}^k(M,g)$ est en fait constitué de formes qui sont lisses.

Voici une justification de cette dénomination. On définit le laplacien par

$$\Delta = (d+\delta)^2.$$

On notera Δ_k pour la restriction du laplacien aux $k-$formes. On a par exemple $\Delta_0 = -d^2/dt^2$ sur $\mathbb{R}$. Δ est un opérateur différentiel elliptique du second ordre, et lorque M est complète, alors il est essentiellement auto-adjoint ([G] ou [Ch]). Ceci repose en grande partie sur le fait qu'on peut, grâce à la complétude, intégrer par parties pour les éléments du domaine $\mathrm{Dom}(\Delta)$:

$$\forall \alpha \in \mathrm{Dom}(\Delta),\ \langle \Delta\alpha, \alpha\rangle_{\mathrm{L}^2} = ||\mathrm{d}\alpha||^2_{\mathrm{L}^2} + ||\delta\alpha||^2_{\mathrm{L}^2}.$$

Toujours dans le cas où M est complète, on a donc

$$\mathcal{H}^k(M,g) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M) /\, \Delta\alpha = 0\},$$

d'où le nom de formes harmoniques.

Quand M a un bord compact ∂M, et que M est métriquement complète, il convient de définir le laplacien avec de bonnes conditions au bord. Par exemple, désignons par $C_b^\infty(\Lambda^* T^* M)$ l'ensemble des formes lisses à support borné (qui ne sont donc pas forcément nulles sur le bord, contrairement aux éléments de C_0^∞), par ν une normale sur le bord et par $i_\nu \alpha$ le produit intérieur de la forme différentielle α par ν ; alors le laplacien Δ^A initialement défini sur l'espace avec conditions absolues au bord

$$\{\alpha \in C_b^\infty / \, i_\nu \alpha = i_\nu d\alpha = 0\}$$

est essentiellement auto-adjoint (voir [Ch] ou [T]). De même, si $i : \partial M \hookrightarrow M$ est l'inclusion, est le laplacien Δ^R défini sur l'espace avec conditions relatives au bord

$$\{\alpha \in C_b^\infty / \, i^* \alpha = i^* \delta\alpha = 0\}$$

est essentiellement auto-adjoint.

1.2 La L^2−cohomologie

1.2.1 L^2-cohomologie d'une variété riemannienne complète

Soit (M, g) une variété riemannienne complète. On note $C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$ (respectivement $L^2(\Lambda^k T^* M)$, etc...) l'ensemble des k−formes lisses à support compact (respectivement de carré intégrable, etc...) dans M.

Définition 1.2. *Le k−ème espace de L^2−cohomologie (réduite) de M est défini par*

$$H_2^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) / \, d\alpha = 0\} / \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}^{L^2},$$

où $\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}^{L^2}$ signifie qu'on a pris l'adhérence de $dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)$ dans L^2.

Remarques.

i) $\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) / \, d\alpha = 0\}$ est toujours fermé dans L^2. Un moyen de le voir est de constater qu'une forme α de carré intégrable et fermée vérifie par définition

$$\forall \beta \in C_0^\infty, \, \langle \alpha, \delta\beta \rangle_{L^2} = 0,$$

donc

$$\{\alpha \in L^2 / \, d\alpha = 0\} = (\delta C_0^\infty)^\perp,$$

est fermé. On en déduit que $H_2^k(M)$ est un espace de Hilbert.

ii) Notons par $\Omega_2^*(M)$ l'ensemble des formes de carré intégrable sur M dont la différentielle est aussi dans L^2 (au sens des distributions). On aurait aussi pu définir la L^2-cohomologie réduite par le quotient

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)/\, d\alpha = 0\}/\overline{d\Omega_2^{k-1}(M)}^{L^2},$$

et cette définition paraît même plus naturelle, si on veut copier la construction de la cohomologie de de Rham, en remplaçant la condition "formes lisses" par la condition "formes de carré intégrable". En fait, les deux définitions coïncident grâce à la complétude de M. Pour le montrer, il nous suffit de montrer que $d\Omega_2^*(M)$ est inclus dans l'adhérence de $dC_0^\infty(\Lambda^* T^* M)$. Soit donc α un élément de $\Omega_2^*(M)$. Comme M est complète, il existe une suite (ρ_l) de fonctions lisses à supports compacts vérifiant

$$|\rho_l| \leq 1, \quad \rho_l \to 1\,(l \to \infty), \quad |d\rho_l| \leq 1, \quad \text{et } d\rho_l \to 0 \text{ sur les compacts.}$$

Alors la suite $d(\rho_l \alpha) = \rho_l d\alpha + d\rho_l \wedge \alpha$ tend vers $d\alpha$ dans L^2 par convergence dominée. On peut donc approcher les éléments de $d\Omega_2^*(M)$ par des éléments de l'image par d de formes qui ont un support compact. En fait, un argument classique de régularisation permet de supposer que ces formes sont lisses. Ainsi, on a bien montré l'inclusion souhaitée.

iii) Un autre espace très proche souvent considéré est l'espace de L^2-cohomologie non réduite, qui est la cohomologie du complexe $(\Omega_2^*(M), d)$: c'est le quotient de $\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)/\, d\alpha = 0\}$ par $d\Omega_2^{k-1}(M)$, sans prendre d'adhérence. En général, L^2-cohomologie réduite et non réduite ne sont pas égales, car l'image de d n'est pas fermée. Il y a néanmoins égalité en degré k lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k, et la proposition 2.7 montre que dans ce cas il y a aussi égalité en degré $k+1$. La L^2-cohomologie non réduite jouit des propriétés usuelles de la cohomologie, comme par exemple la suite de Mayer-Vietoris, mais en général il n'en est pas de même pour la L^2-cohomologie réduite. Dans la suite, "L^2-cohomologie" voudra dire "L^2-cohomologie réduite".

Il y a une interprétation de la L^2-cohomologie en termes de formes harmoniques. En effet, nous avons la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira [dR, théorème 24] :

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

et de plus,

$$\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M)/\, d\alpha = 0\} = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}.$$

On en déduit que

$$H_2^k(M) \simeq \mathcal{H}^k(M).$$

Cette identification est très utile pour l'étude des formes harmoniques L^2, car même si la L^2-cohomologie (réduite) n'a pas toujours toutes les propriétés d'une "vraie" cohomologie, elle reste d'une utilisation souple, et on peut lui appliquer des techniques cohomologiques. Les deux points de vue (formes harmoniques L^2/ L^2-cohomologie) sont en fait complémentaires. Ainsi, comme les formes harmoniques sont lisses, l'isomorphisme ci-dessus montre qu'on peut calculer la L^2-cohomologie en utilisant des formes lisses. D'un autre côté, comme conséquence immédiate de l'isomorphisme, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 1.3. *Soit (M,g) une variété riemannienne, et h une métrique sur M, quasi-isométrique à g (i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}h \leq g \leq Ch$). Alors $\mathcal{H}^*(M,g) \simeq \mathcal{H}^*(M,h)$.*

Démonstration. La L^2-cohomologie est par définition invariante par quasi-isométries. □

Remarquons que ce résultat n'est *a priori* pas évident, car une hypothèse sur la métrique à l'ordre zéro se traduit par une conclusion sur les espaces de formes harmoniques L^2 ; or ces espaces sont définis à l'aide de l'opérateur δ qui fait intervenir des dérivées de la métrique.

1.2.2 L^2-cohomologie des variétés à bord

Soit (M,g) une variété avec un bord compact, et métriquement complète. On peut définir des espaces de L^2-cohomologie absolue et relative. On note par $C_b^\infty(\Lambda^k T^*M)$ l'espace des k-formes lisses à support borné sur M, le support pouvant rencontrer le bord (contrairement à ce qui se passe pour les éléments de C_0^∞). L'espace de L^2-cohomologie absolue est alors défini par :

$$H_2^k(M) = (\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp / \overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

Quelques commentaires s'imposent sur cette définition. On rappelle que $\Omega_2^*(M)$ est l'ensemble des formes de carré intégrable sur M dont la différentielle est aussi dans L^2. Par analogie avec la cohomologie de de Rham, il est peut-être plus naturel, pour construire la L^2-cohomologie absolue, de considérer le quotient du noyau de d agissant sur $\Omega_2^*(M)$ par l'adhérence de $d\Omega_2^*(M)$. Encore une fois, ceci revient au même que la première définition donnée ci-dessus (voir aussi les remarques qui suivent la définition 1.2 de la L^2-cohomologie d'une variété complète). En effet, pour montrer ce fait, on remarque d'abord qu'on a toujours

$$\{\alpha \in L^2 / \, d\alpha = 0\} = (\delta C_0^\infty)^\perp.$$

Il suffit maintenant de voir que $d\Omega_2^*(M)$ est inclus dans l'adhérence de $dC_b^\infty(\Lambda^* T^*M)$, ce qui est prouvé de manière analogue à la remarque ii) suivant la définition 1.2 de la L^2-cohomologie.

Il existe aussi un isomorphisme entre cet espace de L^2-cohomologie absolue et un espace de formes harmoniques. Précisons un peu ce point. On note par $(d+\delta)^A$ la réalisation de l'opérateur $d+\delta$ avec condition absolue au bord. Si ν désigne une normale unitaire sur le bord ∂M, $(d+\delta)^A$ est initialement défini comme étant $d+\delta$ agissant sur

$$\{\varphi \in C_b^\infty(\Lambda^* T^* M) /\, i_\nu \varphi = 0\},$$

où $i_\nu \varphi$ est le produit intérieur de la forme φ par le champ de vecteurs ν. Cet opérateur est essentiellement auto-adjoint, et le domaine $\mathrm{Dom}((\mathrm{d}+\delta)^{\mathrm{A}})$ de l'extension $(d+\delta)^A$ est formé par l'ensemble des formes ξ de L^2, telles qu'il existe une forme γ dans L^2 vérifiant

$$\forall \varphi \in C_b^\infty,\ i_\nu \varphi = 0,\ \langle \xi, (d+\delta)\varphi \rangle_{L^2} = \langle \gamma, \varphi \rangle_{L^2}, \tag{1.1}$$

et on pose $(d+\delta)^A \xi = \gamma$. Un élément ξ de ce domaine est dans le premier espace de Sobolev de M et on peut parler de $\xi|_{\partial M}$ comme élément de l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\Lambda^* T^* \partial M)$; on va voir que $i_\nu \xi = 0$. Soit en effet φ dans C_b^∞, avec $i_\nu \varphi = 0$. En intégrant par parties, on a

$$\langle \xi, (d+\delta)^A \varphi \rangle_{L^2} = \langle (d+\delta)^A \xi, \varphi \rangle_{L^2} - \int_{\partial M} \langle i_\nu \xi, \varphi \rangle.$$

Comme $(d+\delta)^A$ est symétrique, on en déduit en particulier que

$$\forall \varphi \in C_b^\infty,\ i_\nu \varphi = 0,\ \int_{\partial M} \langle i_\nu \xi, \varphi \rangle = 0.$$

Ceci implique que $i_\nu \xi = 0$, car d'une part les formes lisses de ∂M sont denses dans $H^{1/2}(\Lambda^* T^* \partial M)$, et d'autre part, étant donnée une forme lisse ψ sur ∂M, on peut trouver une forme φ sur M, lisse à support borné, vérifiant $i_\nu \varphi = 0$ et telle que $\varphi|_{\partial M} = \psi$.

On a l'identification suivante entre l'espace de L^2-cohomologie absolue et un espace de formes harmoniques vérifiant la condition absolue sur le bord ∂M :

$$H_2^k(M) \simeq \mathcal{H}_A^k(M) := \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) /\, d\alpha = \delta\alpha = 0,\ i_\nu \alpha = 0\}.$$

En effet, on a, comme dans le cas des variétés complètes, la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

avec $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des formes harmoniques (sans condition au bord)

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) /\, d\alpha = \delta\alpha = 0\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} H_2^k(M) &= \mathcal{H}^k(M)/(\mathcal{H}^k(M)\cap \overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}) \\ &\simeq \mathcal{H}^k(M)\cap (\overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)})^\perp. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\mathcal{H}^k(M)\cap (\overline{dC_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)})^\perp \simeq \{\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*M)/\, d\alpha=\delta\alpha=0,\, i_\nu\alpha=0\}.$$

Or, si α est une forme lisse sur M (jusqu'au bord), par intégration par parties, on a

$$\forall\varphi\in C_b^\infty,\ \langle\alpha,d\varphi\rangle_{L^2}=\langle\delta\alpha,\varphi\rangle_{L^2}-\int_{\partial M}\langle i_\nu\alpha,\varphi\rangle,$$

d'où découle facilement l'identifcation souhaitée.

Passons maintenant rapidement à la L^2-cohomologie relative. Elle est définie par :

$$H_2^k(M,\partial M)=(\delta C_b^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp/\overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}.$$

On peut aussi bien entendu considérer l'opérateur $(d+\delta)^R$ défini initialement avec condition relative au bord sur l'espace

$$\{\varphi\in C_b^\infty(\Lambda^*T^*M)/\, i^*\varphi=0\},$$

avec i l'inclusion $\partial M\hookrightarrow M$, et faire une analyse analogue à ce qui précède, avec cette nouvelle condition au bord. Puis, on peut voir que la L^2-cohomologie relative est isomorphe à un espace de formes harmoniques vérifiant la condition relative au bord :

$$H_2^k(M,\partial M)\simeq \mathcal{H}_R^k(M):=\{\alpha\in L^2(\Lambda^kT^*M)/\, d\alpha=\delta\alpha=0,\, i^*\alpha=0\}.$$

1.2.3 L^2-cohomologie à poids

Nous terminons cette partie par la présentation de la L^2-cohomologie à poids. Si $U: M\to\mathbb{R}$ est une fonction lisse définie sur M, on pose $\mathrm{dv_U}=\mathrm{e^U dv_g}$, où $\mathrm{dv_g}$ est la mesure riemannienne associée à g. On note L_U^2 l'espace des formes de carré intégrable par rapport à la mesure $\mathrm{dv_U}$. On peut alors considérer l'adjoint formel δ_U de d par rapport à cette mesure $\mathrm{dv_U}$:

$$\forall\alpha,\beta\in C_0^\infty, \langle\delta_U\alpha,\beta\rangle_{L_U^2}=\langle\alpha,d\beta\rangle_{L_U^2},$$

d'où il vient

$$\delta_U=e^{-U}\delta e^U.$$

Tout ce qui a été dit précédemment reste valable en remplaçant L^2 par L_U^2 et δ par δ_U. On peut par exemple définir les espaces de L^2-cohomologie à poids $H^k_{2,U}(M)$ par rapport au poids U (ou plus précisément par rapport au poids e^U)

$$H^k_{2,U}(M) = \{\alpha \in L^2_U(\Lambda^k T^*M) /\, d\alpha = 0\} / \overline{dC^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*M)}^{L^2_U}.$$

De plus on a l'identification

$$H^k_{2,U}(M) \simeq \mathcal{H}^k_U(M) := \{\alpha \in L^2_U(\Lambda^k T^*M) /\, d\alpha = \delta_U \alpha = 0\}.$$

Il y a des définitions et des résultats similaires lorsqu'on a un bord compact. Ainsi, la L^2-cohomologie à poids absolue est

$$H^k_{2,U}(M) = (\delta_U C^\infty_0(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp / \overline{dC^\infty_b(\Lambda^{k-1}T^*M)},$$

où l'orthogonal et l'adhérence sont pris dans L^2_U. Et on a l'isomorphisme

$$H^k_{2,U}(M) \simeq \{\alpha \in L^2_U(\Lambda^k T^*M) /\, d\alpha = \delta_U \alpha = 0,\, i_\nu \alpha = 0\},$$

avec ν la normale sur le bord ∂M. De même, pour la L^2-cohomologie à poids relative, on a

$$\begin{aligned} H^k_{2,U}(M, \partial M) &:= (\delta_U C^\infty_b(\Lambda^{k+1}T^*M))^\perp / \overline{dC^\infty_0(\Lambda^{k-1}T^*M)} \\ &\simeq \{\alpha \in L^2_U(\Lambda^k T^*M) /\, d\alpha = \delta_U \alpha = 0,\, i^*\alpha = 0\}, \end{aligned}$$

avec $i : \partial M \hookrightarrow M$ l'inclusion naturelle.

1.3 Exemples

1.3.1 Variétés compactes

Supposons ici que la variété M est compacte (sans bord). Dans ce cas, le célèbre théorème de Hodge-de Rham identifie complètement les espaces de formes harmoniques L^2 et donc la L^2-cohomologie (voir par exemple [dR, théorème 24]) :

Théorème 1.4. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, sans bord. Alors ses espaces de formes harmoniques L^2 sont de dimension finie, et isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M : $\mathcal{H}^*(M, g) \simeq H^*(M)$.*

Remarques.

i) Lorsque notre variété compacte M a un bord, on a aussi identification de la L^2-cohomologie absolue (respectivement relative) avec la cohomologie absolue (respectivement relative) de M (voir par exemple [T]).

ii) Les conditions L^2 sont superflues ici, mais on les garde par analogie avec le cas non compact. En effet, notre motivation principale est de comprendre ce qui subsiste du théorème précédent pour certaines variétés non compactes, où la condition L^2 est essentielle. Dans toute la suite, (M, g) sera donc une variété riemannienne complète, non compacte.

1.3.2 Cas des degrés 0 et n

La L^2-cohomologie en degrés 0 et $n = \dim(\mathrm{M})$ dépend d'une manière très simple de la géométrie de (M,g) :

Proposition 1.5. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne connexe de dimension n. Alors*

$$H_2^0(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \textit{si le volume de } (M,g) \textit{ est fini,} \\ 0, & \textit{sinon} \end{cases}$$

Si de plus M est orientable, alors le même résultat est valable pour $H_2^n(M)$.

Démonstration. Un élément de $H_2^0(M)$ est une fonction fermée, donc constante (M est supposée connexe). Or les constantes non nulles sont de carré intégrable si et seulement si le volume est fini, ce qui prouve la première assertion. La deuxième assertion découle du fait que sur une variété orientable, l'opérateur $*$ de Hodge est un isomorphisme entre le noyau de Δ_k et celui de Δ_{n-k} pour tout entier k, et donc on a une dualité de Poincaré $H_2^k(M) \simeq H_2^{n-k}(M)$. □

1.3.3 Cas du degré moitié

Proposition 1.6. *Soit (M^n,g) une variété riemannienne de dimension paire $n = 2m$. Alors $\mathcal{H}^m(M,g)$ est un invariant conforme.*

Démonstration. L'espace $\mathcal{H}^m(M,g)$ est isomorphe à l'espace de L^2-cohomologie $H_2^m(M)$. Dans la définition de $H_2^m(M)$, la métrique n'intervient que dans la norme L^2 sur les m-formes. Mais cette norme L^2 sur les $m-$formes est un invariant conforme. □

On peut ainsi montrer que pour le plan hyperbolique (ou plus généralement pour l'espace hyperbolique de dimension paire), l'espace des formes harmoniques L^2 en degré moitié est dimension infinie. En effet, le plan hyperbolique est conforme au disque unité de $\mathbb{R}^2$, muni de la métrique euclidienne canonique, et il existe une infinité de $1-$formes harmoniques sur ce disque : il suffit de considérer toutes les $1-$formes du type $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, avec P et Q deux fonctions harmoniques.

1.4 L^2-cohomologie et topologie

Un de nos buts est de voir ce qui subsiste du résultat de Hodge-de Rham (théorème 1.4) dans le cas non compact : est-ce qu'il existe un lien entre la topologie et les formes harmoniques L^2 ? L'observation générale suivante est due à Anderson [An] :

Proposition 1.7. *Soit (M,g) une variété complète. Alors pour tout entier k l'image $\mathrm{Im}(\mathrm{H}^\mathrm{k}_\mathrm{c}(\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{M}))$ s'injecte dans $\mathcal{H}^k(M)$.*

Démonstration. Soit $[\alpha]$ une classe de $H^k_c(M)$, de représentant la forme lisse à support compact et fermée α. Nous avons une application naturelle de $H^k_c(M)$ vers $\mathcal{H}^k(M)$, qui à toute classe $[\alpha]$ associe la projection orthogonale de la forme α sur $\mathcal{H}^k(M)$. Supposons que l'image d'une telle classe soit nulle. D'après [dR, théorème 24], il existe une forme harmonique h, et deux distributions (courants) β et γ telles qu'on ait

$$\alpha = h + d\beta + \delta\gamma,$$

et en fait β et γ sont lisses car $\Delta\alpha$ est lisse. Or, par hypothèse, on a $h = 0$, et α étant fermée, on a aussi $\gamma = 0$, donc $\alpha = d\beta$ est nulle dans $H^k(M)$, ce qui prouve bien l'injectivité souhaitée. $\square$

Il n'y a en général pas bijectivité. Cependant, dans [A-P-S], Atiyah, Patodi et Singer ont été amenés à étudier les formes harmoniques L^2 d'une variété à bouts cylindriques, afin d'obtenir une formule pour la signature d'une variété à bord. Leur résultat est le suivant :

Théorème 1.8. *Soit M une variété à bouts cylindriques. Alors on a l'isomorphisme*

$$\mathcal{H}^*(M) \simeq \mathrm{Im}(\mathrm{H}^*_\mathrm{c}(\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{M})).$$

1.5 Le résultat de J. Lott

Pour finir cette introduction à la L^2-cohomologie, nous citons le théorème suivant de J. Lott [L2] :

Théorème 1.9. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes complètes qui sont isométriques en dehors d'un compact. Soit k un entier. Alors $\mathcal{H}^k(M, g)$ est de dimension finie si et seulement si $\mathcal{H}^k(N, h)$ est de dimension finie.*

Ceci signifie en gros que la finitude de la dimension de la L^2-cohomologie ne dépend que de la géométrie à l'infini. Ce résultat est important pour guider l'intuition. On cherchera ainsi à relier la L^2-cohomologie, la topologie, et la géométrie à l'infini. S'il est vrai que dans un cadre général, de tels liens ne sont pas faciles à trouver, il existe cependant un cas assez simple pour lequel on peut avoir quelques informations intéressantes : c'est l'objet de la partie suivante.

2 L^2-cohomologie et spectre du laplacien

2.1 Spectre essentiel

Nous présentons ici de façon sommaire quelques faits sur le spectre essentiel (voir par exemple [R-S]).

Définition 2.1. *Soient H un espace de Hilbert, et T un opérateur non borné auto-adjoint sur H.*

1. *Le spectre $\sigma(T)$ de T est constitué de l'ensemble des nombres réels λ tels que $T - \lambda Id$ n'est pas injective ou bien n'est pas surjective.*
2. *Le spectre discret de T est constitué de l'ensemble des valeurs propres qui sont isolées dans le spectre, et qui ont une multiplicité finie (i.e.* $\mathrm{Ker}(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id})$ *est de dimension finie).*
3. *Le spectre essentiel $\sigma_{ess}(T)$ de T est le complémentaire dans le spectre du spectre discret.*

Exemple 1. En utilisant la transformée de Fourier, on voit aisément que pour le laplacien sur $\mathbb{R}^n$, on a $\sigma(\Delta) = \sigma_{ess}(\Delta) = [0, \infty[$.

Exemple 2. Sur une variété compacte, le spectre du laplacien est constitué d'une suite croissante de valeurs propres de multiplicité finie, tendant vers l'infini. Ainsi, le spectre essentiel est vide

Exemple 3. Sur l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, on a, d'après [Do1]

$$\sigma(\Delta_k) = \sigma_{ess}(\Delta_k) = \begin{cases} [(n-2k-1)^2/4, \infty[, & \text{si } k \leq (n-1)/2, \\ \{0\} \cup [1/4, \infty[, & \text{si } k = n/2, \\ [(2k-n-1)^2/4, \infty[, & \text{si } k \geq (n+1)/2. \end{cases}$$

Remarquez que quand n est pair, 0 est une valeur propre isolée du spectre en degré moitié, mais sa multiplicité est infinie.

Rappelons maintenant le lien entre spectre essentiel et les opérateurs de Fredholm (c'est-à-dire dont l'image est fermée, et dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie). Nous allons en effet voir que sous une condition portant sur le spectre essentiel de T (autoadjoint), T est "presque" inversible. Nous commençons par la proposition suivante :

Proposition 2.2. 0 *n'est pas dans le spectre essentiel de T autoadjoint si et seulement si T est un opérateur de Fredholm.*

Une des raisons pour lesquelles on s'intéresse aux opérateurs de Fredholm est le résultat suivant :

Proposition 2.3. 0 *n'est pas dans le spectre essentiel de T, si et seulement s'il existe un opérateur borné $G : H \to \mathrm{Dom(T)} \subset \mathrm{H}$, tel que $GT = Id - P$ sur $\mathrm{Dom(T)}$ et $TG = Id - P$ sur H, où on a noté P le projecteur orthogonal sur le noyau de T. G s'appelle un opérateur de Green. Dans ce cas, on a la décomposition orthogonale suivante :*

$$H = \mathrm{Ker(T)} \oplus \mathrm{Im(T)}.$$

Nous terminons cette brève présentation par le théorème suivant, qui dit en gros que le spectre essentiel du laplacien ne dépend que de la géométrie à l'infini (voir les travaux de Glazman [Gl], Donnelly [Do], Anghel [Ang], ou encore de Bär [Ba]).

Théorème 2.4. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète et non compacte, et $0 \leq k \leq n$ un entier donné. Alors $0 \notin \sigma_{ess}(\Delta_k)$ si et seulement si on a une inégalité de Poincaré à l'infini, i.e. il existe un compact K et une constante $C > 0$ tels que*

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K)),\ C\|\alpha\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \alpha\|_{L^2}.$$

Remarque. Considérons les trois inégalités suivantes (avec des constantes $C, C', C'' > 0$) :

a) $\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K)),\ C\|\alpha\|_{L^2} \leq \|\Delta_k \alpha\|_{L^2}$,

b) $\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K)),\ C'\|\alpha\|_{L^2} \leq \|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}$,

c) $\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K)),\ C''\|\alpha\|_{L^2}^2 \leq \langle \Delta\alpha, \alpha\rangle$.

Alors b) et c) sont équivalentes : pour voir ceci, il suffit de remarquer que pour des formes à support compact, on a $\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle = \|d\alpha\|_{L^2}^2 + \|\delta\alpha\|_{L^2}^2$, et d'utiliser l'inégalité $(u^2 + v^2) \leq (u + v)^2$, valable pour des nombres réels u et v positifs. De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que c) (et donc aussi b)) implique a).

2.2 Une suite exacte en L^2−cohomologie

Remarque préliminaire. Dans tout ce qui suit, nous ne considérons, pour simplifier, que la L^2-cohomologie sans poids. Cependant, tous les résultats restent aussi valables avec un poids.

Après l'énoncé du résultat de Lott (théorème 1.9), nous avions soulevé le problème de trouver des liens entre la topologie, la géométrie à l'infini, et la L^2−cohomologie d'une variété. Les résultats de la partie précédente (théorème 2.4) laissent penser que de tels liens sont plus faciles à mettre en évidence lorsque zéro n'est pas dans le spectre essentiel de la variété, et c'est ce que nous allons montrer ici.

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, et D un ouvert à bord compact et régulier de M. Considérons la suite suivante, qui est l'analogue en L^2−cohomologie de la suite usuelle associée à l'homomorphisme cobord en cohomolgie de de Rham (voir [Go]) :

$$\ldots \to H_2^k(D, \partial D) \xrightarrow{e} H_2^k(M) \xrightarrow{r} H_2^k(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_2^{k+1}(D, \partial D) \to \ldots,$$

où les applications e, r et b sont définies comme suit :

- $r : H_2^*(M) \to H_2^*(M \setminus D)$ est l'application de restriction induite en L^2−cohomologie par l'inclusion $M \setminus D \hookrightarrow M$.
- e est l'extension par zéro : si $[\alpha] \in H_2^*(D, \partial D)$, de représentant α, on définit $\tilde{\alpha}$ sur M par $\tilde{\alpha} = \alpha$ sur D, et $\tilde{\alpha} = 0$ sur $M \setminus D$. On va d'abord voir que $\tilde{\alpha}$ est faiblement fermée. Soit h le représentant harmonique de la classe $[\alpha]$ qui vérifie la condition relative au bord : h est de carré

intégrable sur D, $dh = \delta h = 0$ sur D, et $i^*h = 0$, où $i : \partial D \hookrightarrow D$ est l'inclusion naturelle. Par définition de l'espace de cohomologie relative $H_2^*(D, \partial D)$, il existe une suite φ_l de formes dans l'espace $C_0^\infty(\Lambda^* T^* D)$, telle que dans L^2, on ait

$$\alpha = h + \lim_{l \to \infty} d\varphi_l.$$

Soit maintenant ψ un élément de $C_0^\infty(\Lambda^* T^* M)$. On a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\alpha}, \delta\psi \rangle_{L^2(M)} &= \langle \alpha, \delta\psi \rangle_{L^2(D)} \\ &= \langle h, \delta\psi \rangle_{L^2(D)} + \lim_{l \to \infty} \langle d\varphi_l, \delta\psi \rangle_{L^2(D)} \end{aligned}$$

Le premier terme du deuxième membre de l'égalité précédente est nul, en utilisant une intégration par parties :

$$\langle h, \delta\psi \rangle_{L^2(D)} = \langle dh, \psi \rangle_{L^2(D)} - \int_{\partial D} \langle i^* h, \psi \rangle = 0,$$

et de même, le deuxième membre est aussi nul. Ceci montre que

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Lambda^* T^* M),\ \langle \tilde{\alpha}, \delta\psi \rangle_{L^2(M)} = 0,$$

et donc $\tilde{\alpha}$ est faiblement fermée. On pose alors $e[\alpha] = [\tilde{\alpha}]$ et ceci est indépendant du représentant α choisi.

- b se définit comme l'homomorphisme cobord ordinaire en cohomologie de de Rham : si $[\alpha]$ est une classe dans $H_2^k(M \setminus D)$, on peut en choisir un représentant α fermé et lisse. Il existe alors une $k-$forme $\overline{\alpha}$ lisse sur M, qui coïncide avec α sur $M \setminus D$, et qui vérifie $d\overline{\alpha} = 0$ sur un voisinage de $M \setminus D$ (voir le théorème 4.1 page 176 de [Go]). On impose de plus que $\overline{\alpha}$ et $d\overline{\alpha}$ soient de carré intégrable (c'est toujours possible, car le bord ∂D étant compact, on peut choisir $\overline{\alpha}$ telle que $\overline{\alpha}|_D$ soit à support borné ; voir encore [Go]). On vérifie que la classe de $d\overline{\alpha}$ dans $H_2^{k+1}(D, \partial D)$ est indépendante du représentant lisse α choisi, ainsi que du prolongement $\overline{\alpha}$, et on pose $b[\alpha] = [d\overline{\alpha}]$.

Le principal résultat de cette partie est :

Théorème 2.5. *Soient (M, g) une variété riemannienne complète, et D un ouvert à bord compact et régulier de M. On suppose que pour un certain entier k, 0 n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k. Alors nous avons la suite exacte*

$$H_2^{k-1}(M) \xrightarrow{r} H_2^{k-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_2^k(D, \partial D) \xrightarrow{e} H_2^k(M)$$

$$\xrightarrow{r} H_2^k(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_2^{k+1}(D, \partial D) \xrightarrow{e} H_2^{k+1}(M) \xrightarrow{r} H_2^{k+1}(M \setminus D).$$

Remarque. Observons que cette suite exacte est bien connue. En effet, si 0 n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k, alors la L^2-cohomologie et la L^2-cohomologie non réduite sont les mêmes en degré k, et on sait dans ce cas, d'après les travaux de Cheeger (voir aussi les travaux de Gold'shtein, Kuz'minov, et Shvedov [G-K-S]) que la suite est exacte au rang k. De plus, si l'opérateur de Gauss-Bonnet $d+\delta$ est "non-parabolique à l'infini", et vérifie une hypothèse supplémentaire, alors la suite exacte est vraie pour tous les degrés (voir [C1] et [C4] pour plus de détails). Ce qui est intéressant ici, c'est que l'hypothèse sur le spectre essentiel en degré k entraîne aussi l'exactitude de la suite au rang $k+1$. Ce résultat est probablement bien connu, mais n'ayant pas trouvé de référence précise, nous avons préféré l'inclure ici.

Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. Tout d'abord, nous avons le résultat classique suivant (version facile du théorème 1.5 de [C1]) :

Proposition 2.6. *Soit (M,g) une variété complète. On suppose que pour un entier k donné, 0 n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k. Alors il existe un opérateur de Green continu*

$$G = G_- \oplus G_+ \,:\, L^2(\Lambda^k T^*M) \to L^2(\Lambda^{k-1}T^*M) \oplus L^2(\Lambda^{k+1}T^*M),$$

tel que pour toute forme $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)$, on ait

$$\alpha = P\alpha + dG_-\alpha + \delta G_+\alpha,$$

où P désigne la projection orthogonale sur le noyau du laplacien. De plus, si α est lisse, alors $G\alpha$ est aussi lisse. Enfin, si α est nulle dans $H_2^k(M)$, alors $\alpha = dG_-\alpha$.

Démonstration. Comme 0 n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k, il existe un opérateur de Green (borné)

$$A \,:\, L^2(\Lambda^k T^*M) \to \mathrm{Dom}(\Delta_\mathrm{k}) \subset \mathrm{L}^2(\Lambda^\mathrm{k}\mathrm{T}^*\mathrm{M}),$$

tel que $\Delta A = \mathrm{Id} - \mathrm{P}$ sur $L^2(\Lambda^k T^*M)$. L'opérateur G se définit par

$$G\alpha = \delta A\alpha + dA\alpha.$$

G est borné sur L^2, car A envoie continûment L^2 dans le domaine de Δ, et on a $(d+\delta)^2 = \Delta$ au sens opérateur. On voit alors facilement que G vérifie les assertions de l'énoncé. $\square$

Remarque. Comme on l'a rappelé dans la partie précédente (théorème 2.4), l'hypothèse sur le spectre essentiel ne dépend que de la géométrie à l'infini. Ainsi, si on revient aux hypothèses de la proposition, le laplacien défini sur D ou $M \setminus D$ avec conditions absolues ou relatives au bord vérifie aussi l'assertion sur le spectre essentiel, donc la même preuve s'adapte à ce cas, et on obtient l'existence d'un opérateur de Green.

La proposition qui suit est essentielle pour montrer le décalage dans la suite exacte.

Proposition 2.7. *Soit (X, g) une variété riemannienne avec éventuellement un bord compact, métriquement complète. On suppose que 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k, défini avec conditions absolues ou relatives au bord. Soit α une forme différentielle dans L^2, de degré k ou $k+1$. Si α est nulle dans $H_2^*(X)$ (respectivement dans $H_2^*(X, \partial X)$), alors il existe une forme β dans le domaine $(d+\delta)^A$ (respectivement de $(d+\delta)^R$), cofermée, et vérifiant $\alpha = d\beta$. De plus, β est lisse là où α l'est.*

Démonstration. Le cas où α est de degré k découle de la proposition 2.6 et de la remarque qui suit sa preuve. On fait la démonstration uniquement dans le cas où X a un bord, et où α est de degré $k+1$, nulle dans $H_2^*(X)$. Cette nullité signifie qu'il existe une suite β_l de $k-$formes lisses à supports bornés telle que $\alpha = \lim d\beta_l$. On note Δ_k^A le laplacien défini avec conditions absolues sur le bord, P^A la projection orthogonale sur le noyau $\mathrm{Ker}(\Delta_\mathrm{k}^\mathrm{A})$, et $(d+\delta)_k^A$ la restriction de l'opérateur $(d+\delta)^A$ aux $k-$formes. L'hypothèse sur le spectre essentiel montre, grâce à la proposition 2.6, qu'il existe un opérateur de Green G^A pour l'opérateur $(d+\delta)_k^A$, qui envoie l'espace L^2 dans le domaine de $(d+\delta)^A$. On peut donc écrire

$$\beta_l = P^A(\beta_l) + dG_-^A\beta_l + \delta G_+^A\beta_l.$$

Or $G_+^A\beta_l$ vérifie la condition absolue au bord : $i_\nu G_+^A\beta_l = 0$, où i_ν désigne le produit intérieur par la normale ν sur le bord ∂X. Donc $\delta G_+^A\beta_l$ vérifie aussi cette condition absolue : ceci s'obtient en intégrant par parties de deux manières différentes l'expression $\langle \delta G_+^A\beta_l, d\varphi\rangle_{L^2}$, pour une forme φ de C_b^∞. D'un côté, on a

$$\langle \delta G_+^A\beta_l, d\varphi\rangle_{L^2} = \langle G_+^A\beta_l, d^2\varphi\rangle_{L^2} + \int_{\partial X} \langle i_\nu G_+^A\beta_l, d\varphi\rangle = 0,$$

et de l'autre,

$$\langle \delta G_+^A\beta_l, d\varphi\rangle_{L^2} = 0 - \int_{\partial X} \langle i_\nu \delta G_+^A\beta_l, \varphi\rangle,$$

ce qui entraîne

$$\forall \varphi \in C_b^\infty,\ \int_{\partial X} \langle i_\nu \delta G_+^A\beta_l, \varphi\rangle = 0,$$

et par conséquent, $i_\nu \delta G_+^A\beta_l = 0$ sur le bord ∂X. Ainsi, quitte à remplacer β_l par $\delta G_+^A\beta_l$, on peut supposer que β_l est dans le domaine de $(d+\delta)_k^A$, cofermée, orthogonale au noyau $\mathrm{Ker}(\Delta_\mathrm{k}^\mathrm{A})$, et que les $d\beta_l$ (qui restent dans C_b^∞) continuent de converger vers α. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathrm{Dom}((\mathrm{d}+\delta)_\mathrm{k}^\mathrm{A}),\ \varphi \perp \mathrm{Ker}(\Delta_\mathrm{k}^\mathrm{A}),\ \mathrm{C}\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \|\mathrm{d}\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|\delta\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2.$$

Cette inégalité montre alors que (β_l) est une suite de Cauchy dans L^2, par conséquent il existe une $k-$forme β telle que $\beta_l \to \beta$ dans L^2. On a donc

$d\beta_l \to d\beta$ au sens des distributions, mais comme $d\beta_l \to \alpha$ dans L^2, ceci montre que $\alpha = d\beta$ au sens des distributions. D'autre part, les β_l sont cofermées, donc on a aussi $\delta\beta = 0$ au sens des distributions. Ainsi, on a $(d+\delta)(\beta) = \alpha$ au sens des distributions, et si α est lisse, par régularité elliptique de l'opérateur $d+\delta$, β est aussi lisse. Enfin, en se servant du fait que les β_l convergent vers β, et des propriétés des β_l, on voit facilement que β est dans le domaine de $(d+\delta)^A$ défini par 1.1 (ceci découle aussi du fait que $(d+\delta)^A$ est un opérateur fermé). $\square$

On va maintenant pouvoir passer à la preuve du théorème 2.5 (voir aussi [C1] ou [C4]). Tout d'abord, par construction on a toujours

$$r \circ e = 0,\ b \circ r = 0,\ e \circ b = 0,$$

donc

$$\mathrm{Im(e)} \subset \mathrm{Ker(r)},\ \mathrm{Im(r)} \subset \mathrm{Ker(b)},\ \mathrm{Im(b)} \subset \mathrm{Ker(e)}.$$

Montrons que Ker(r) $\subset$ Im(e). Soit $[\alpha] \in H_2^*(M)$ telle que $r[\alpha] = 0$. Si α est de degré k ou $k+1$, grâce à la proposition 2.7, il existe une forme lisse β dans $L^2(\Lambda^k T^*(M \setminus D))$, telle que $\alpha|_{M\setminus D} = d\beta$. Si $\overline{\beta} \in L^2(\Lambda^k T^* M)$ est une extension lisse de β, alors on voit que $e[\alpha - d\overline{\beta}] = [\alpha]$.

Montrons maintenant que Ker(e) $\subset$ Im(b). Soit α une forme de degré k ou $k+1$, de carré intégrable sur D, avec $d\alpha = \delta\alpha = 0$, et $i^*\alpha = 0$, où i est l'inclusion $\partial D \hookrightarrow D$. Si $\tilde{\alpha}$ désigne l'extension par zéro de α, on suppose que $\tilde{\alpha}$ est nulle en L^2-cohomologie (i.e. $[\alpha] \in$ Ker(e)). Grâce à la proposition 2.7, on écrit $\tilde{\alpha} = d\beta$, avec β de carré intégrable, cofermée, et comme $\tilde{\alpha}$ est lisse sur D et $M \setminus D$, β est aussi lisse sur D et sur $M \setminus D$. Soit $\overline{\beta}$ une extension lisse de $\beta|_{M\setminus D}$ comme dans la définition de l'application b. Alors on a $\alpha - d\overline{\beta} = d(\beta - \overline{\beta})$, avec $\beta - \overline{\beta}$ lisse sur D, de carré intégrable, et de tiré en arrière nul sur ∂D. Donc $\alpha - d\overline{\beta}$ est L^2-cohomologue à zéro, c'est-à-dire que $[\alpha] = b[\beta|_{M\setminus D}]$.

Enfin, montrons que Ker(b) $\subset$ Im(r). Soit $[\alpha] \in$ Ker(b) : avec les notations précédentes, ceci signifie que $d\overline{\alpha}|_D$ est nulle dans $H_2^*(D, \partial D)$. Si α est de degré $k-1$ ou k, alors d'après la proposition 2.7, il existe une forme β définie sur D, de carré intégrable, vérifiant la condition relative $i^*\beta = 0$ au bord, et telle que $d\overline{\alpha}|_D = d\beta$. On note $\tilde{\beta}$ l'extension par zéro de β sur M. La forme $\overline{\alpha} - \tilde{\beta}$ est fermée (faiblement), de carré intégrable, et on a $r[\overline{\alpha} - \tilde{\beta}] = [\alpha]$. $\square$

Dans le but de relier L^2-cohomologie et topologie, il est utile de remarquer :

Corollaire 2.8. *Soient (M,g) une variété riemannienne complète, et D un ouvert borné à bord régulier de M. On suppose que pour un certain entier k, 0 n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_k. Alors nous avons les deux suites exactes*

$$H_c^{k-1}(D) \xrightarrow{e} H_2^{k-1}(M) \xrightarrow{r} H_2^{k-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^k(D) \xrightarrow{e} H_2^k(M)$$

$$\xrightarrow{r} H_2^k(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^{k+1}(D) \xrightarrow{e} H_2^{k+1}(M) \xrightarrow{r} H_2^{k+1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^{k+2}(D),$$

et

$$H^{k-2}(D) \xrightarrow{b} H_2^{k-1}(M \setminus D, \partial D) \xrightarrow{e} H_2^{k-1}(M) \xrightarrow{r} H^{k-1}(D) \xrightarrow{b} H_2^k(M \setminus D, \partial D)$$

$$\xrightarrow{e} H_2^k(M) \xrightarrow{r} H^k(D) \xrightarrow{b} H_2^{k+1}(M \setminus D, \partial D) \xrightarrow{e} H_2^{k+1}(M) \xrightarrow{r} H^{k+1}(D).$$

Démonstration. La première suite est une conséquence directe du théorème 2.5, si l'on observe d'une part que $H_2^*(D, \partial D) \simeq H_c^*(D)$, car D est borné, et d'autre part que les égalités Ker(r) = Im(e) et Ker(b) = Im(r) sont toujours vraies lorsque D est borné (voir le corollaire qui suit le lemme 10 dans [G-K-S]). La deuxième suite découle aussi du théorème 2.5, si l'on échange D en $M \setminus D$ dans ce théorème, puis si l'on se sert du fait que l'hypothèse D borné entraîne $H_2^*(D) \simeq H^*(D)$, puis Ker(e) = Im(b) et Ker(r) = Im(e) (voir encore [G-K-S]). □

2.3 Un moyen pratique d'obtenir des inégalités de Poincaré à l'infini

2.3.1 Une formule d'intégration par parties

Le but de cette partie est de présenter une formule d'intégration par parties pour l'opérateur $d + \delta$. Cette formule et ses corollaires seront utiles pour l'étude de la L^2-cohomologie de certains types de variétés. Le théorème principal est d'abord dû à Donnely et Xavier [Do-X] ; une démonstration plus synthétique en est aussi donnée par Escobar et Freire dans [E-F]. Ensuite Ballmann et Brüning [B-B1] ont étendu cette formule au cadre plus large des opérateurs de type Dirac et ont amélioré les résultats de Donnelly et Xavier.

Avant d'énoncer le résultat principal, nous faisons la remarque suivante : si f est une fonction de classe C^2 sur une variété riemannienne M, alors son hessien $Hessf$ se prolonge à une forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda^k T^* M$ comme suit

$$Hess(f)(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} Hess(f)(X_i, X_j)\langle i_{X_i}\alpha, i_{X_j}\beta\rangle, \qquad (2.2)$$

où les X_i forment un repère orthonormal local et $i_X\alpha$ désigne le produit intérieur de la forme α par le champ de vecteurs X (la formule est bien entendu indépendante du choix d'un tel repère). Nous commençons par énoncer et démontrer un lemme utile pour la suite (voir [E-F] lemme 1.1).

Lemme 2.9. *Soient f une fonction lisse sur M, α et β deux $p-$formes également lisses. Alors en tout point de M, on a*

$$\langle L_{\nabla f}\alpha, \beta\rangle = \langle \nabla_{\nabla f}\alpha, \beta\rangle + Hess(f)(\alpha, \beta),$$

où L désigne la dérivation de Lie.

Démonstration. Soit $\{X_i\}$ un repère orthonormal local, et X un champ de vecteurs quelconque. Par définition de L, et grâce à la relation de commutation vérifiée par la connexion ∇, on a

$$\begin{aligned}
(L_X\alpha)(X_1,\dots,X_p) &= X(\alpha(X_1,\dots,X_p)) - \sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1,\dots,[X,X_i],\dots,X_p) \\
&= \left[X(\alpha(X_1,\dots,X_p)) - \sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1,\dots,\nabla_X X_i,\dots,X_p)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1,\dots,\nabla_{X_i}X,\dots,X_p) \\
&= (\nabla_X\alpha)(X_1,\dots,X_p) + \sum_{i=1}^{p}\alpha(X_1,\dots,\nabla_{X_i}X,\dots,X_p).
\end{aligned}$$

En particulier, si on prend $X = \nabla f$ et si on prend le produit scalaire de l'égalité précédente par β, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle L_{\nabla f}\alpha,\beta\rangle &= \langle\nabla_{\nabla f}\alpha,\beta\rangle \\
&\quad + \frac{1}{p!}\sum_{j_1,\dots,j_p}\sum_{i=1}^{p}\alpha(X_{j_1},\dots,\nabla_{X_{j_i}}(\nabla f),\dots,X_{j_p})\beta(X_{j_1},\dots,X_{j_i},\dots,X_{j_p}) \quad (*).
\end{aligned}$$

Or, par définition, on a

$$\nabla_{X_{j_i}}(\nabla f) = \sum_k \langle\nabla_{X_{j_i}}(\nabla f),X_k\rangle X_k = \sum_k Hess(f)(X_{j_i},X_k)X_k,$$

donc le deuxième terme du membre de droite de $(*)$ est égal à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p!}\sum_{j_1,\dots,j_p}\sum_{i=1}^{p}\sum_k Hess(f)(X_{j_i},X_k)\alpha(X_k,X_{j_1},\dots,\hat{X}_{j_i},\dots,X_{j_p}) \\
&.\beta(X_{j_i},X_{j_1},\dots,\hat{X}_{j_i},\dots,X_{j_p}) \\
= \ &\frac{1}{p!}\sum_k\sum_{i=1}^{p}\sum_{j_i}\sum_{j_1,\dots,\hat{j}_i,\dots j_p} Hess(f)(X_{j_i},X_k)(i_{X_k}\alpha)(X_{j_1},\dots,\hat{X}_{j_i},\dots,X_{j_p}) \\
&.(i_{X_{j_i}}\beta)(X_{j_1},\dots,\hat{X}_{j_i},\dots,X_{j_p}) \\
= \ &\frac{1}{p!}\sum_k\sum_{i=1}^{p}\sum_{j_i}(p-1)!Hess(f)(X_{j_i},X_k)\langle i_{X_k}\alpha,i_{X_{j_i}}\beta\rangle \\
= \ &\frac{1}{p!}\sum_k p(p-1)!\sum_i Hess(f)(X_i,X_k)\langle i_{X_k}\alpha,i_{X_i}\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(*)$ s'écrit

$$\langle L_{\nabla f}\alpha,\beta\rangle = \langle \nabla_{\nabla f}\alpha,\beta\rangle + \sum_{i,j} Hess(f)(X_i,X_j)\langle i_{X_i}\alpha, i_{X_j}\beta\rangle,$$

ce qui est bien la conclusion annoncée. □

Nous avons alors, suivant [E-F] :

Théorème 2.10. *On considère (M^n,g) une variété riemannienne complète. Soient f une fonction de classe C^2 sur M de gradient borné, Ω un ouvert (à bord compact assez régulier) de M, et α une forme différentielle dans le domaine de l'opérateur $d+\delta$, lisse jusqu'au bord de Ω. On note ν la normale unitaire sortante sur $\partial\Omega$, et* $\mathrm{d}\sigma$ *la mesure riemannienne induite sur le bord $\partial\Omega$. Alors*

$$\int_\Omega \left[2Hess(f)(\alpha,\alpha) + (\Delta f)|\alpha|^2\right] \mathrm{dv_g} =$$
$$2\int_\Omega \left[\langle i_{\nabla f}d\alpha,\alpha\rangle + \langle i_{\nabla f}\alpha,\delta\alpha\rangle\right] \mathrm{dv_g} + \int_{\partial\Omega}\left[-|\alpha|^2\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\nu} + 2\langle \mathrm{i_{\nabla f}}\alpha, \mathrm{i}_\nu\alpha\rangle\right]\mathrm{d}\sigma.$$

Démonstration. On note $j : \partial\Omega \to M$ l'inclusion canonique, et ν la normale unitaire sortante de $\partial\Omega$. Alors pour $\beta \in C^\infty(\Lambda^k T^*M)$ et $\gamma \in C^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$, on a, d'après le théorème de Stokes :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle d\gamma,\beta\rangle &= \int_\Omega d\gamma\wedge *\beta \\
&= \int_\Omega d(\gamma\wedge *\beta) + \int_\Omega \gamma\wedge *\delta\beta \\
&= \int_{\partial\Omega} j^*(\gamma\wedge *\beta) + \int_\Omega \langle\gamma,\delta\beta\rangle \\
&= \int_{\partial\Omega}\langle\gamma, i_\nu\beta\rangle + \int_\Omega\langle\gamma,\delta\beta\rangle.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\gamma = i_{\nabla f}\alpha$ et $\beta=\alpha$, on obtient :

$$\int_\Omega \langle d i_{\nabla f}\alpha,\alpha\rangle = \int_{\partial\Omega}\langle i_{\nabla f}\alpha, i_\nu\alpha\rangle + \int_\Omega \langle i_{\nabla f}\alpha,\delta\alpha\rangle.$$

Or, pour tout champ de vecteurs X, on a $di_X + i_X d = L_X$ (formule de Cartan), donc après intégration, la formule du lemme 2.9 ci-dessus s'écrit

$$\int_\Omega Hess(f)(\alpha,\alpha) + \frac{1}{2}\nabla f.\nabla|\alpha|^2 = \int_\Omega \langle i_{\nabla f}d\alpha,\alpha\rangle + \langle i_{\nabla f}\alpha,\delta\alpha\rangle + \int_{\partial\Omega}\langle i_{\nabla f}\alpha, i_\nu\alpha\rangle.$$

Enfin, on intègre par parties le membre de gauche, pour obtenir la formule voulue. □

Le premier corollaire que nous en déduisons se trouve dans [Do-X] et [B-B1] sous une forme légèrement différente, et consiste à considérer le cas particulier des formes à support compact.

Corollaire 2.11. *Soit f une fonction de classe C^2 sur M^n telle que $|\nabla f|$ soit borné sur M. On considère α une forme lisse à support compact, alors on a l'estimation*

$$|\int_M \left[2Hess(f)(\alpha,\alpha)+(\Delta f)|\alpha|^2\right]| \leq 2\sup_M(|\nabla f|)\left[\|d\alpha\|_{L^2}+\|\delta\alpha\|_{L^2}\right]\|\alpha\|_{L^2}$$

Démonstration. On considère un ouvert Ω qui contient le support de α (dans son intérieur), donc dans l'égalité du théorème précédent, il n'y a plus de termes de bord. On majore le deuxième membre de cette égalité en utilisant le fait que $|i_X\alpha| \leq |X||\alpha|$ pour tout champ de vecteurs X, puis en utilisant des inégalités de Cauchy-Schwarz, pour arriver au résultat annoncé. $\square$

Cette idée s'adapte aussi au cas où l'on a un poids $U : M \to \mathbb{R}$. En effet, si on repart de l'égalité du lemme 2.9, et si on l'intègre par rapport à la mesure $\mathrm{dv_U} = \mathrm{e^U dv_g}$, alors par intégration par parties, on trouve

Corollaire 2.12. *Soient f et U deux fonctions de classe C^2 sur (M,g), et Ω un ouvert à bord compact et régulier de M. Si α est une forme différentielle lisse et à support borné dans Ω (le support pouvant rencontrer le bord), on a*

$$\int_\Omega \left[2Hess(f)(\alpha,\alpha)+(\Delta f)|\alpha|^2-\langle\nabla f,\nabla U\rangle|\alpha|^2\right]\mathrm{dv_U} =$$
$$2\int_\Omega\left[\langle i_{\nabla f}d\alpha,\alpha\rangle+\langle i_{\nabla f}\alpha,\delta_U\alpha\rangle\right]\mathrm{dv_U}+\int_{\partial\Omega}\left[-|\alpha|^2\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\nu}+2\langle \mathrm{i}_{\nabla \mathrm{f}}\alpha,\mathrm{i}_\nu\alpha\rangle\right]\mathrm{e^U d}\sigma.$$

2.3.2 Exemple 1 : spectre essentiel des variétés de volume fini, à courbure négative et pincée

Nous allons voir dans ce paragraphe comment on peut utiliser la formule d'intégration par parties de la partie précédente pour avoir des informations sur le spectre essentiel des variétés de volume fini, à courbure négative et pincée. Nous commençons par quelques notations et généralités (voir [B-B1, partie 5]). Pour une fonction f de classe C^2, on note $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de son hessien $Hess(f)$, et on pose

$$\varepsilon_k = \sum_{i>n-k}\lambda_i - \sum_{i\leq n-k}\lambda_i, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Soit $X_1,\ldots X_n$ un repère local orthonormal qui diagonalise le hessien de f, et $\theta^1,\ldots,\theta^n$ le repère dual de $1-$formes. Une $k-$forme α s'écrit en coordonnées locales $\alpha=\sum_I \alpha_I\theta^I$, où $I=(i_1,\ldots,i_k)$ est un multi-indice de longueur k,

$\theta^I = \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_k}$ et les α_I sont des fonctions. On a donc

$$\begin{aligned}
2Hess(f)(\alpha,\alpha) + (\Delta f)|\alpha|^2 &= 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |i_{X_i}\alpha|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_I \alpha_I^2, \\
&= \sum_I \left(2\sum_{i\in I} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \alpha_I^2, \\
&= \sum_I \left(\sum_{i\in I} \lambda_i - \sum_{i\notin I} \lambda_i \right) \alpha_I^2.
\end{aligned}$$

Or, pour tout multi-indice de longueur k, on a

$$\varepsilon_k \leq \sum_{i\in I} \lambda_i - \sum_{i\notin I} \lambda_i \leq -\varepsilon_{n-k},$$

donc on obtient finalement :

$$\varepsilon_k|\alpha|^2 \leq 2Hess(f)(\alpha,\alpha) + (\Delta f)|\alpha|^2 \leq -\varepsilon_{n-k}|\alpha|^2, \qquad (2.3)$$

pour toute forme de degré k.
Dans toute la suite de cette partie, on considère (M^n, g) une variété riemannienne complète de volume fini. On suppose de plus que la courbure sectionnelle K de M est négativement pincée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes a et b, avec

$$-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0.$$

On rappelle des résultats concernant la géométrie de telles variétés (voir [E]) : M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord. Si Σ est l'une des composantes (en nombre fini) du bord, il y a un bout correspondant. A tout rayon géodésique d'un bout, on associe une fonction de Busemann r (deux telles fonctions ne différent que d'une constante). Si B est un bout associé à la composante de bord Σ, alors B est difféomorphe à $]0,\infty[\times\Sigma$, les tranches $\{t\}\times\Sigma$ étant les niveaux d'une fonction de Busemann r. Par ce difféomorphisme, la métrique s'écrit

$$g = dr^2 + g_r,$$

où les g_r sont une famille de métriques sur Σ. Enfin, pour tout r, on a

$$e^{-2br} g_0 \leq g_r \leq e^{-2ar} g_0.$$

Nous rappelons maintenant l'argument de Donnelly et Xavier concernant le spectre essentiel de ces variétés (voir [Do-X, proposition 5.2] et l'amélioration de ce résultat dans [B-B1, corollaire 5.4]) :

Proposition 2.13. *On conserve les hypothèses précédentes. Si $(n-1-k)a - kb =: \varepsilon > 0$, pour un certain $k < (n-1)/2$, alors on a l'inégalité de Poincaré à l'infini :*

$$\varepsilon\|\alpha\|_{L^2} \leq 2[\|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}],$$

pour toute forme α de degré k ou $(n-k)$, à support compact contenu dans un bout. En particulier, 0 n'est pas dans le spectre essentiel des laplaciens agissant sur les $k-$formes ou les $(n-k)-$formes.

Démonstration. On va utiliser l'inégalité du corollaire 2.11, en prenant pour f une fonction de Busemann associée au bout considéré. Une telle fonction est bien de classe C^2, et son gradient est toujours de norme 1, donc en utilisant la première partie de l'inégalité 2.3, on a :

$$\int_M \varepsilon_k|\alpha|^2 \leq 2\,[\|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}]\,\|\alpha\|_{L^2},$$

pour toute $k-$forme α à support dans le bout. Il suffit de voir que sous les hypothèses de la proposition, on a $\varepsilon \leq \varepsilon_k$. Or, ceci est une conséquence du théorème de comparaison des hessiens de Greene et Wu (voir [G-W, p. 19] : on a $\lambda_1 = 0$, et $-b \leq \lambda_i \leq -a$, pour $i \geq 2$, d'où

$$\varepsilon_k \geq (n-1-k)a - kb = \varepsilon > 0.$$

On obtient ainsi l'inégalité de Poincaré à l'infini annoncée pour les formes de degré k. Pour les formes de degré $(n-k)$, on utilise encore l'inégalité du corollaire 2.11, mais cette fois combinée avec la deuxième partie de l'inégalité 2.3, et on arrive au même résultat. □

2.3.3 Exemple 2 : spectre essentiel des variétés conformément compactes

Dans cette partie, nous considérons une variété riemannienne $\overline{M}^n$ compacte à bord, de dimension n, munie d'une métrique riemannienne $\overline{g}$ qui est lisse jusqu'au bord. Soit $y : \overline{M} \to \mathbf{R}_+$ une fonction lisse et positive définissant le bord : $\partial M = y^{-1}(0)$, et $dy \neq 0$ le long de ∂M. On munit M de la métrique $g = \overline{g}/y^2$; cette métrique est complète et on dit que $\overline{M}$ (ou M) est une variété conformément compacte. L'exemple typique d'une telle situation est donnée par le modèle du disque hyperbolique, où $\overline{g}$ est la métrique euclidienne, et $y(x) = (1-|x|^2)/2$. Dans [M], R. Mazzeo relie la L^2-cohomologie de M en degrés $k < (n-1)/2$ (respectivement $k > (n+1)/2$) à la cohomologie relative (respectivement absolue) de $\overline{M}$. De plus, il détermine complètement le spectre essentiel du laplacien pour tous les degrés. Pour ceci, l'auteur utilise des outils de calcul pseudo-différentiel adaptés à la géométrie considérée. Ici, nous allons voir comment on peut retrouver simplement une partie des résultats de Mazzeo sur le spectre essentiel (et on verra dans le corollaire 3.10 qu'on peut aussi retrouver plus facilement le théorème de Mazzeo sur la L^2-cohomologie).

Proposition 2.14. *Soit (M,g) une variété conformément compacte de dimension n. Alors 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k, pour $k \neq n/2, (n\pm 1)/2$.*

Pour la démonstration de cette proposition, on raisonne comme dans la preuve de la proposition 2.13 (c'est-à-dire utilisation de la formule d'intégration par parties du corollaire 2.11 avec une fonction f bien choisie pour obtenir une inégalité de Poincaré à l'infini), et il suffit donc de montrer

Lemme 2.15. *Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, si on note K le compact $\{y \geq \varepsilon\}$, on a :*

a) *si $k > (n+1)/2$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $k-$forme α à support dans $M \setminus K$, on ait*

$$2Hess(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) + \Delta(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2 \geq \mathrm{C}|\alpha|^2,$$

b) *si $k < (n-1)/2$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $k-$forme α à support dans $M \setminus K$, on ait*

$$2Hess(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) + \Delta(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2 \leq -\mathrm{C}|\alpha|^2.$$

Démonstration. On va estimer le hessien et le laplacien, pour la métrique g, de la fonction $f = -\ln(y)$, en fonction de ces mêmes objets pour la métrique $\overline{g}$ qui lui est conforme. On a les calculs classiques suivants, que l'on ne redémontrera pas (voir par exemple [Be]) :

Lemme 2.16. *Pour tout champ de vecteurs X, on a avec des notations évidentes*

$$Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\mathrm{X,X}) = \frac{1}{\mathrm{y}}\mathrm{Hess}^{\overline{\mathrm{g}}}(\mathrm{y})(\mathrm{X,X}) - \frac{1}{\mathrm{y}^2}\mathrm{dy(X)dy(X)} + \frac{1}{\mathrm{y}^2}\overline{\mathrm{g}}(\mathrm{X,X})|\mathrm{dy}|^2_{\overline{\mathrm{g}}},$$

$$\Delta^g(-\mathrm{ln(y)}) = -\mathrm{y}\Delta^{\overline{\mathrm{g}}}\mathrm{y} - (\mathrm{n}-1)|\mathrm{dy}|^2_{\overline{\mathrm{g}}}.$$

Soient maintenant $\varepsilon > 0$, K un compact tel qu'en dehors de K on ait $y < \varepsilon$ et $dy \neq 0$, et soit enfin α une $k-$forme lisse à support dans $M \setminus K$. On va estimer $2Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) + \Delta^{\mathrm{g}}(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2$ grâce à un repère $g-$orthonormal local bien choisi : soit $X_1 = \nabla y/|\nabla y|$, et X_i, $i = 2,\dots,n$ une base orthonormale de $X_1^\perp = \nabla y^\perp$. On a alors :

$$\overline{g}(X_i,X_i) = y^2 g(X_i,X_i) = y^2,$$

$$dy(X_i) = g(\nabla y, X_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq 2 \\ g(\nabla y, \nabla y/|\nabla y|) = |\nabla y| = y|dy|_{\overline{g}} & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\frac{1}{y}Hess^{\overline{g}}(y)(X_i,X_i) = yH^{\overline{g}}(y)(X_i/y,X_i/y) = O(y),$$

car les X_i/y sont de norme 1 pour la métrique $\overline{g}$ et y est lisse sur $\overline{M}$ compacte (jusqu'au bord). De même, on a :

$$y\Delta^{\overline{g}}y = O(y).$$

Finalement, dans la base des X_i, les formules du lemme 2.16 s'écrivent :

$$\begin{aligned} Hess^g(-\mathrm{ln(y)}) &= |\mathrm{dy}|^2_{\mathrm{\overline{g}}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} + \mathrm{O(y)} \\ \Delta^g(-\mathrm{ln(y)}) &= -(\mathrm{n}-1)|\mathrm{dy}|^2_{\mathrm{\overline{g}}} + \mathrm{O(y)}. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Donc grâce à la formule 2.2 qui définit le hessien, on a :

$$\begin{aligned} Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) &= |dy|^2_{\overline{g}}\sum_{i\geq 2}\langle i_{X_i}\alpha, i_{X_i}\alpha\rangle + O(y)|\alpha|^2 \\ &= |dy|^2_{\overline{g}}(k|\alpha|^2 - |i_{X_1}\alpha|^2) + O(y)|\alpha|^2. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

En combinant les équations 2.4 et 2.5, on obtient :

$$2Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha)+\Delta^{\mathrm{g}}(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2 = \left[(2\mathrm{k}-(\mathrm{n}-1))|\alpha|^2 - 2|\mathrm{i}_{\mathrm{X}_1}\alpha|^2\right]|\mathrm{dy}|^2_{\mathrm{\overline{g}}} + \mathrm{O(y)}|\alpha|^2.$$

Enfin, en utilisant la double inégalité $0 \leq |i_{X_1}\alpha|^2 \leq |\alpha|^2$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} 2Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) + \Delta^{\mathrm{g}}(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2 &\geq (2k-2-(n-1))|dy|^2_{\overline{g}}|\alpha|^2 + O(y)|\alpha|^2 \\ 2Hess^g(-\mathrm{ln(y)})(\alpha,\alpha) + \Delta^{\mathrm{g}}(-\mathrm{ln(y)})|\alpha|^2 &\leq (2k-(n-1))|dy|^2_{\overline{g}}|\alpha|^2 + O(y)|\alpha|^2 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que comme $dy \neq 0$ sur ∂M (par hypothèse), $|dy|^2_{\overline{g}}$ reste uniformément borné loin de 0 si on choisit bien K. Ainsi, si $k > (n+1)/2$, c'est la première des deux inégalités ci-dessus qui permet de conclure, et si $k < (n-1)/2$, c'est la deuxième qui permet de conclure. □

3 Application de la "méthode de la suite exacte"

Nous allons ici utiliser les résultats de la partie précédente pour calculer les espaces de L^2-cohomologie de certaines variétés. La méthode utilisée est assez élémentaire. Tout d'abord, on se sert de la formule d'intégration par parties du théorème 2.10, ou de l'un de ses corollaires, pour trouver une inégalité de Poincaré à l'infini en certains degrés. Les deux suites du corollaire 2.8 seront donc exactes pour ces degrés. On applique alors encore une fois la formule d'intégration par parties pour montrer que la L^2-cohomologie absolue ou relative à l'infini (c'est-à-dire celle de $M \setminus D$, dans les notations de ce corollaire) est nulle pour les bons degrés. On en déduit donc un isomorphisme entre la L^2-cohomologie et la topologie. Cet argument marchera en général pour les degrés loin du degré moitié, et il faudra d'autres ingrédients pour pouvoir aussi traiter les cas restants.

3.1 Illustration de la méthode sur deux cas simples

3.1.1 Variétés hyperboliques de volume fini

Nous considérons ici une variété (M, g) qui est complète, de volume fini, et hyperbolique (c'est-à-dire de courbure sectionnelle égale à -1). Nous rappelons qu'une telle variété a un nombre fini de bouts, et que chaque bout est difféomorphe à un demi-cylindre $[0, \infty[\times\Sigma$, où Σ est un quotient du tore $\mathbb{T}^{n-1}$ par un groupe fini d'isométries. De plus, la métrique sur chaque bout s'écrit

$$g = dr^2 + e^{-2r}h,$$

avec r une fonction de Busemann associée au bout, et h une métrique sur Σ (indépendante de r).

Avant de calculer les espaces de L^2-cohomologie de ces variétés, on donne un argument heuristique, pour savoir à quels résultats on peut s'attendre. On considère donc juste un bout $[0, \infty[\times\Sigma$, muni de la métrique hyperbolique $g = dr^2 + e^{-2r}h$. La projection canonique

$$\pi : [0, \infty[\times\Sigma \to \Sigma$$

induit un isomorphisme en cohomologie

$$\pi^* : H^*([0, \infty[\times\Sigma) \to H^*(\Sigma).$$

Mais si α est un représentant d'une classe de $H^k(\Sigma)$, est-ce que $\pi^*\alpha$ est de carré intégrable ? La norme ponctuelle de $\pi^*\alpha$ en un point (r, θ) de $[0, \infty[\times\Sigma$ est

$$|\alpha|_g^2(r, \theta) = e^{2kr}|\alpha|_h^2(\theta).$$

De plus, la mesure riemannienne est donnée par $\mathrm{dv_g} = \mathrm{e^{-(n-1)r}drdv_h}$, en notant par $\mathrm{dv_h}$ la mesure riemannienne de $\Sigma, h)$. On en déduit

$$\|\pi^*\alpha\|_{L^2}^2 = \|\alpha\|_{L^2(\Sigma)}^2 \int_0^\infty e^{(2k-(n-1))r}\mathrm{dr}.$$

Cette norme est finie lorsque $k < (n-1)/2$, et on peut donc penser qu'on a un isomorphisme entre la L^2-cohomologie et la cohomologie de de Rham pour ces degrés. On peut rendre rigoureux ce raisonnement, et le compléter pour retrouver de façon plus simple certains résultats de [Z1] et [M-P] :

Théorème 3.1 (Zucker, Mazzeo-Phillips). *Soit (M^n, g), une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini, et hyperbolique en dehors d'un compact (i.e. à courbure sectionnelle égale à -1 en dehors d'un compact). Alors on a les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & si\ k < (n-1)/2, \\ \mathrm{Im}(H_c^{k/2}(M) \to H^{k/2}(M)), & si\ k = n/2, (n \pm 1)/2, \\ H_c^k(M), & si\ k > (n+1)/2. \end{cases}$$

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que M est orientable. Sinon, il suffit de considérer le revêtement à deux feuillets $\tilde{M}$ qui, lui, est orientable, en remarquant que si τ est l'automorphisme du revêtement, alors la L^2-cohomologie de M est isomorphe à la L^2-cohomologie $\tau-$invariante de $\tilde{M}$. L'avantage qu'on en tire est que sur une variété orientable, l'opérateur $*$ de Hodge réalise une isométrie entre les k et les $(n-k)-$formes harmoniques. Ainsi, on peut se limiter aux degrés inférieurs ou égaux à $n/2$.

1. On montre d'abord le résultat pour les degrés inférieurs strictement à $(n-3)/2$. D'après la proposition 2.13, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien agissant sur les $k-$formes pour $k < (n-1)/2$. On pose $p = \mathrm{E}((\mathrm{n}-2)/2)$ (E désigne la partie entière). Si D est un ouvert borné à bord régulier, le corollaire 2.8 montre qu'on a la suite exacte :

$$\ldots \to H_2^k(M \setminus D, \partial D) \to H_2^k(M) \to H^k(D) \to H_2^{k+1}(M \setminus D, \partial D) \to \ldots$$
$$\ldots \to H_2^{p-1}(M \setminus D, \partial D) \to H_2^{p-1}(M) \to H^{p-1}(D) \to H_2^p(M \setminus D, \partial D).$$

   On peut supposer que M a un seul bout, et on note par r une fonction de Busemann associée. On choisit alors $D = \{r < c\}$, où c est un réel positif fixé qu'on prendra ensuite assez grand. On va montrer que pour ce choix, on a $H_2^k(M \setminus D, \partial D) = 0$, pour tout $k \leq p$. Soit donc $\alpha \in H_2^k(M \setminus D, \partial D)$, avec $k \leq p$: α est de carré intégrable et vérifie $d\alpha = \delta\alpha = 0$, et $i^*\alpha = 0$, où i est l'inclusion de ∂D dans $M \setminus D$. Le long du bord de $M \setminus D$, la normale unitaire extérieure est $\nu = -\nabla r$, donc $\partial r/\partial \nu = -1 \leq 0$. D'après les hypothèses sur α, la formule d'intégration par parties du théorème 2.10 montre que

$$\int_{M \setminus D} \left[2Hess(r)(\alpha, \alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2\right] \leq 0.$$

   Or l'inégalité 2.3 et l'hypothèse sur les courbures sectionnelles montrent qu'on a une estimation

$$2Hess(r)(\alpha, \alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 \geq (n-2k-1)|\alpha|^2.$$

   Les deux dernières inégalités permettent alors de conclure que $\alpha = 0$. Ainsi, on a bien montré que $H_2^k(M \setminus D, \partial D) = 0$, pour tout $k \leq p$. La suite exacte donne donc : $H^k(D) \simeq H_2^k(M)$, et ceci pour tout $k \leq p-1$, et tout ouvert $D = \{r < c\}$. En prenant c assez grand, on obtient le résultat annoncé pour $k < (n-3)/2$. Le cas $k > (n+3)/2$ se traite ou bien par dualité, comme on l'a déjà expliqué, ou bien de manière analogue à ce qui précède.

2. On traite maintenant les degrés proches du degré moitié. Supposons par exemple que $n = 2m$ est pair, et montrons le théorème pour $k = m-1$ de façon plus directe. D'après ce qui précède, on a une injection

$$0 \to H_2^{m-1}(M) \xrightarrow{r} H^{m-1}(D).$$

On va montrer que cette application est surjective. Soit donc $[\alpha]$ une classe de $H^{m-1}(D)$. Près de ∂D, on écrit $\alpha = \beta(r) + dr \wedge \gamma(r)$, où $\beta(r)$ et $\gamma(r)$ sont considérées comme des formes sur ∂D, dépendant du paramètre r. On pose

$$\varphi(r) = \int_0^r \gamma(t)dt,$$

et on voit facilement que $\alpha - d\varphi$ ne contient pas de composante suivant dr. De plus, si d^T désigne la différentielle sur ∂D, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(\alpha - d\varphi) &= \frac{\partial \beta}{\partial r} - d^T\gamma \\ &= d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Donc quitte à remplacer α par $\alpha - d(\rho\varphi)$, où ρ est une fonction lisse à support compact valant un au voisinage de ∂D, on pourra supposer que près de ∂D, α est indépendante de r, et sans composante normale. Comme l'extérieur de D est difféomorphe à un cylindre $]c, \infty[\times \partial D$, on peut prolonger α en dehors de D par $\alpha(r) = \alpha(c)$ pour $r \geq c$. Ce prolongement, noté $\tilde{\alpha}$, reste fermé. Si on montre qu'il est de carré intégrable, on aura $r[\tilde{\alpha}] = [\alpha]$, et r sera bien surjective. On a vu que la métrique sur $M \setminus D \simeq [c, \infty[\times \partial D$ est de la forme $g = dr^2 + e^{-2r}h$. Donc la norme ponctuelle de $\tilde{\alpha}(r)$ vérifie

$$|\tilde{\alpha}(r)|^2 = e^{2(m-1)(r-c)}|\alpha(c)|^2 \leq c^{te}e^{2(m-1)(r-c)}.$$

De plus, la mesure riemannienne est donnée par $\mathrm{dv_g} = \mathrm{e^{(n-1)r}drdv_h}$, en notant par $\mathrm{dv_h}$ la mesure riemannienne de $(\partial D, h)$. On a donc immédiatement

$$\|\tilde{\alpha}\|^2_{L^2(M\setminus D)} \leq c^{te} \int_c^\infty e^{(2(m-1)-(n-1))r}\mathrm{dr} = \mathrm{c^{te}} \int_{\mathrm{c}}^\infty \mathrm{e^{-r}dr} < \infty.$$

Si $n = 2m + 1$ est impair, le même raisonnement marche pour avoir le résultat en degrés $k = m - 1$ et $k = m + 2$.

3. Supposons que $n = 2m$, et traitons le cas $k = n/2 = m$. On sait que, sous nos hypothèses de courbure, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien agissant sur les $k-$formes pour $k \neq m$. Or, on a vu que l'hypothèse sur le spectre essentiel en degré k entraîne aussi l'exactitude de nos deux suites en degré k ou $k - 1$ selon les cas. Les deux suites exactes de la première partie (corollaire 2.8) sont donc vraies pour tous les degrés, et en particulier, on a :

$$H^m_c(D) \to H^m_2(M) \to H^m_2(M \setminus D),$$

et

$$H^m_2(M \setminus D, \partial D) \to H^m_2(M) \to H^m(D).$$

On rappelle que $D = \{r < c\}$, et on va montrer que $H_2^m(M \setminus D) = H_2^m(M \setminus D, \partial D) = 0$, si on choisit le réel c assez grand. Alors les deux suites exactes ci-dessus donneront : $H_c^m(M)$ se surjecte dans $H_2^m(M)$, et $H_2^m(M)$ s'injecte dans $H^m(M)$. Mais d'après Anderson [An] (voir aussi [C4] et la proposition 1.7), $\mathrm{Im}(H_c^m(M) \to H^m(M))$ s'injecte toujours dans $H_2^m(M)$, donc on en déduit que $H_2^m(M) \simeq \mathrm{Im}(H_c^m(M) \to H^m(M))$. Il nous reste donc à montrer que $H_2^m(M \setminus D) = H_2^m(M \setminus D, \partial D) = 0$. Or $M \setminus D$ est conformément équivalent à un demi-cylindre portant la métrique produit, et pour de telles variétés, il est connu que la L^2-cohomologie (absolue ou relative) est nulle. Mais la L^2-cohomologie est un invariant conforme en degré moitié $m = n/2$, donc la L^2-cohomologie de degré m de $M \setminus D$ avec sa métrique initiale est aussi nulle.

4. Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où $n = 2m+1$ est impair et $k = (n-1)/2 = m$. On peut toujours supposer qu'on a un seul bout, et donc qu'en dehors d'un ouvert D, $M \setminus D$ est de la forme $]0, \infty[\times \partial D$, portant la métrique
$$dr^2 + e^{-2r} h,$$
où r est une fonction de Busemann, et h est une métrique sur la variété ∂D. D'après la proposition 2.13, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien en degré $m-1$. Donc d'après les résultats de la première partie, on a les deux suites exactes
$$H_c^m(D) \to H_2^m(M) \to H_2^m(M \setminus D),$$
$$H_2^m(M \setminus D, \partial D) \to H_2^m(M) \to H^m(D).$$
De nouveau, il nous suffit de montrer l'annulation de la L^2-cohomologie à l'infini. On va procéder comme dans la démonstration de [C4, lemme 5.3]. D'abord, $]0, \infty[\times \partial D$ est finiment recouvert par $]0, \infty[\times \mathbb{T}^{n-1}$, avec $\mathbb{T}^{n-1}$ un tore plat. Il suffit donc de faire la preuve pour $]0, \infty[\times \mathbb{T}^{n-1}$. Comme le tore $\mathbb{T}^{n-1}$ agit par isométries sur $]0, \infty[\times \mathbb{T}^{n-1}$, et que cette action engendre des vecteurs de Killing de longueur bornée, le résultat de Hitchin [Hi, théorème 3] montre que toute forme harmonique L^2 vérifiant la condition absolue ou relative est invariante sous cette action. Ainsi, si α est une telle $m-$forme, on peut écrire $\alpha = \beta(r) + dr \wedge \gamma(r)$, et on a :
$$d\alpha = dr \wedge \frac{\partial \beta}{\partial r} = 0,$$
$$\delta \alpha = -\frac{\partial \gamma}{\partial r} + 2\gamma = 0,$$
donc si α vérifie la condition absolue $\gamma(0) = 0$, on obtient finalement $\alpha = \beta(0)$. Mais cette forme n'est de carré intégrable que si elle est nulle. De même, si α vérifie la condition relative, α est forcément nulle.

$\square$

Remarque. La méthode du point 4. de la preuve ci-dessus permet en fait aussi d'obtenir les autres cas d'annulation à l'infini. Nous avons cependant préféré utiliser d'autres méthodes pour ces cas, afin d'illustrer la technique sur cet exemple simple.

Dans la démonstration prédédente, on n'a pas utilisé le fait que quand la dimension n de M est paire, zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien $\Delta_{n/2}$ (voir [Do-X]). En fait, on peut retrouver ce résultat :

Corollaire 3.2. *Si M est une variété hyperbolique complète de volume fini, de dimension $n = 2m$ paire, alors zéro n'est pas dans le spectre essentiel de son laplacien Δ.*

Démonstration. Il reste à considérer le cas du degré moitié m. Grâce au théorème précédent, on sait déjà que l'espace des $m-$formes harmoniques est de dimension finie. Il suffit de montrer que 0 est une valeur spectrale isolée en degré moitié, ce qu'on va faire en rappelant un argument bien connu (voir par exemple la fin de la preuve de [Gro, théorème 1.4.A]). D'abord, comme zéro n'est pas dans le spectre essentiel en degré $k \neq m$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute forme ψ de degré $k \neq m$, avec $\psi \perp \mathcal{H}^*(M)$, on ait

$$C\|\psi\|^2 \leq \|d\psi\|^2 + \|\delta\psi\|^2. \tag{3.6}$$

On va d'abord montrer que l'image de $d : L^2\Lambda^{m-1} \to L^2\Lambda^m$ est fermée. Si $d\varphi$ est un élément de cette image, on peut toujours supposer, grâce à la décompostion de Hodge-de Rham, que φ est cofermée et orhogonale à $\mathcal{H}^{m-1}(M)$. L'inégalité 3.6 appliquée à φ donne donc $C\|\varphi\|^2 \leq \|d\varphi\|^2$, d'où l'on déduit facilement la fermeture de l'image de d. De même, on montre que l'image de $\delta : L^2\Lambda^{m+1} \to L^2\Lambda^m$ est fermée. On a donc

$$L^2\Lambda^m = \mathcal{H}^m(M) \oplus dL^2\Lambda^{m-1} \oplus \delta L^2\Lambda^{m+1},$$

où les notations $dL^2\Lambda^{m-1}$ et $\delta L^2\Lambda^{m+1}$ sont des abus : $dL^2\Lambda^{m-1}$ signifie par exemple l'image de d agissant en tant qu'opérateur non borné sur $L^2\Lambda^{m-1}$. Soit maintenant γ une forme de degré m, orthogonale à $\mathcal{H}^m(M)$. On peut écrire $\gamma = d\alpha + \delta\beta$, avec $\delta\alpha = 0$ et $\alpha \perp \mathcal{H}^{m-1}(M)$ (respectivement $d\beta = 0$ et $\beta \perp \mathcal{H}^{m-1}(M)$). Il vient

$$\langle\gamma,\gamma\rangle = \langle d\alpha, d\alpha\rangle + \langle\delta\beta, d\beta\rangle = \langle\Delta\alpha,\alpha\rangle + \langle\Delta\beta,\beta\rangle.$$

En utilisant successivement les égalités $\Delta\alpha = \delta\gamma$ et $\Delta\beta = d\gamma$, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité 3.6 appliquée à α et β, on trouve

$$\begin{aligned} C\langle\gamma,\gamma\rangle^2 &\leq C\left(\langle\delta\gamma,\alpha\rangle + \langle d\gamma,\beta\rangle\right)^2 \\ &\leq 2C\left(\|\delta\gamma\|^2\|\alpha\|^2 + \|d\gamma\|^2\|\beta\|^2\right) \\ &\leq \left(\|d\gamma\|^2 + \|\delta\gamma\|^2\right)\left(\|d\alpha\|^2 + \|\delta\beta\|^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$\forall\gamma \perp \mathcal{H}^m(M),\ C\|\gamma\|^2 \leq \|d\gamma\|^2 + \|\delta\gamma\|^2,$$

ce qui prouve bien l'existence d'un trou spectral en degré m. □

3.1.2 Surfaces de volume fini, à courbure négative et pincée

Proposition 3.3. *Soit (M^2, g) une surface riemannienne de volume fini, à courbure sectionelle K négative et pincée : il existe deux constantes $0 < a \leq b$ telles que $-b^2 \leq K \leq -a^2$. Alors on a les isomorphismes $H_2^0(M) \simeq H^0(M)$, $H_2^1(M) \simeq \mathrm{Im}(\mathrm{H_c^1(M)} \to \mathrm{H^1(M)})$, et $H_2^2(M) \simeq H_c^2(M)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'isomorphisme pour $H_2^1(M)$. On raisonne comme dans le point 3 de la démonstration du théorème 3.1 : d'après [B-B2], zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien, donc on a les deux suites exactes

$$H_c^1(D) \to H_2^1(M) \to H_2^1(M \setminus D),$$

et

$$H_2^1(M \setminus D, \partial D) \to H_2^1(M) \to H^1(D).$$

Il reste alors à montrer que $H_2^1(M \setminus D) = H_2^1(M \setminus D, \partial D) = 0$. Or M^2 est conformément équivalente à une variété à bouts cylindriques. Comme la L^2-cohomologie en degré moitié est un invariant conforme et que la L^2-cohomologie (absolue ou relative) d'un demi-cylindre $M \setminus D$ est nulle, on en déduit le résultat. □

Remarque. Cette proposition est aussi une conséquence du théorème d'Atiyah-Patodi-Singer [A-P-S] sur la L^2-cohomologie des variétés à bouts cylindriques (voir le théorème 1.8).

3.2 Un cas de L^2-cohomologie à poids

3.2.1 Cas "général"

Soient (M^n, g) une variété riemannienne non compacte, et $U : M \to [0, \infty[$ une fonction qui croît assez vite à l'infini pour que le volume de M par rapport à la mesure $\mathrm{dv_{(-U)}} = \mathrm{e^{-U}dv_g}$ soit fini, où $\mathrm{dv_g}$ est la mesure riemannienne associée à g. Dans [A-S], Ahmed et Stroock montrent, sous certaines hypothèses géométriques (courbure de Ricci minorée, opérateur de courbure majoré), et d'autres hypothèses portant sur la fonction U, que les espaces de cohomologie L^2 à poids sont de dimension finie, et isomorphes aux espaces de cohomologie réelle de M. Nous allons voir que sous des hypothèses beaucoup moins restrictives, ce résultat reste valable. En fait, nous nous intéressons d'abord à des poids e^U, plutôt que e^{-U}, mais la preuve de notre résultat s'applique indifféremment aux deux cas.

Théorème 3.4. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de dimension n. On suppose qu'il existe une fonction $U : M \to \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :*

1. *U exhauste M,*
2. *il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle qu'en dehors d'un compact, on ait*
$$\varepsilon^2 \leq |\nabla U|^2,$$
3. *il existe deux constantes $C_1 \leq 0$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ telles qu'en dehors d'un compact, on ait*
$$C_1|\nabla U|^2 \leq Hess(U) \leq C_2|\nabla U|^2.$$

Si $\eta := 1 + nC_1 - 2nC_2 > 0$, alors 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur $d + \delta_U$. De plus, les espaces de L^2-cohomologie à poids de M, associés au poids e^U, sont de dimension finie, et isomorphes aux espaces de cohomologie à support compact de M : $H^*_{2,U}(M) \simeq H^*_c(M)$.

Remarque. Si $C_2 \leq 0$, alors on a le même résultat en supposant que $1 + nC_1 > 0$ (voir la preuve du théorème).

Démonstration. On montre d'abord que sous nos hypothèses, zéro n'est pas dans le spectre essentiel de $d + \delta_U$. Soit $c > 0$ un réel tel qu'en dehors de l'ouvert borné $D = \{U < c\}$, les hypothèses 2 et 3 du théorème soient vérifiées. Si α est une forme de degré k sur $M\setminus D$, lisse et à support borné, on a, d'après la formule d'intégration par parties du corollaire 2.12 (en prenant $f = U$ dans les notations de ce corollaire) :

$$\int_{M\setminus D} \left[2Hess(U)(\alpha,\alpha) + (\Delta U)|\alpha|^2 - |\nabla U|^2|\alpha|^2\right] \mathrm{dv_U} =$$
$$2\int_{M\setminus D} \left[\langle i_{\nabla U} d\alpha, \alpha\rangle + \langle i_{\nabla U}\alpha, \delta\alpha\rangle\right] \mathrm{dv_U} + \int_{\partial \mathrm{D}} \left[-|\alpha|^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\nu} + 2\langle \mathrm{i}_{\nabla \mathrm{U}}\alpha, \mathrm{i}_\nu\alpha\rangle\right] \mathrm{e^U d}\sigma, \tag{3.7}$$

où ν est la normale unitaire extérieure sur le bord de $M \setminus D$, donc $\nu = -\nabla U/|\nabla U|$ ici. Or, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} 2Hess(U)(\alpha,\alpha) + (\Delta U)|\alpha|^2 - |\nabla U|^2|\alpha|^2 &\leq (-1 + 2kC_2 - nC_1)|\nabla U|^2|\alpha|^2 \\ &\leq -\eta|\nabla U|^2|\alpha|^2. \end{aligned}$$

On considère de plus que α est une forme différentielle vérifiant la condition absolue au bord $i_\nu\alpha = 0$. Le terme de bord de l'égalité 3.7 est alors positif car $-\partial U/\partial\nu = |\nabla U|$, donc compte tenu de l'inégalité précédente, on a

$$\begin{aligned}
\eta \int_{M\setminus D} |\nabla U|^2|\alpha|^2 \mathrm{dv_U} &\leq -2\int_{M\setminus D} [\langle i_{\nabla U} d\alpha, \alpha\rangle + \langle i_{\nabla U}\alpha, \delta_U\alpha\rangle]\,\mathrm{dv_U} \\
&\leq 2\left(\int_{M\setminus D} |\nabla U|^2|\alpha|^2 \mathrm{dv_U}\right)^{1/2} \\
&\qquad \left[||d\alpha||_{L^2_U(M\setminus D)} + ||\delta_U\alpha||_{L^2_U(M\setminus D)}\right],
\end{aligned}$$

où pour passer de la première à la deuxième inégalité, on a d'abord utilisé l'inégalité $|i_X\beta| \leq |X||\beta|$, valable pour tout champ de vecteurs X et toute forme β, et ensuite des inégalités de Cauchy-Schwarz. On en déduit finalement que pour toute forme α à support borné dans $M \setminus D$, vérifiant la condition absolue $i_\nu\alpha = 0$:

$$\eta\varepsilon/2||\alpha||_{L^2_U(M\setminus D)} \leq ||d\alpha||_{L^2_U(M\setminus D)} + ||\delta_U\alpha||_{L^2_U(M\setminus D)} \tag{3.8}$$

Cette inégalité est en particulier vraie pour des formes lisses à support compact dans $M \setminus D$, donc on a une inégalité de Poincaré à l'infini, et par conséquent 0 n'est pas dans le spectre essentiel de l'opérateur $d + \delta_U$. On a alors une suite exacte pour la L^2-cohomologie à poids, analogue à la première suite exacte du corollaire 2.8, c'est-à-dire que pour tout entier k, la suite

$$H^k_c(D) \xrightarrow{e} H^k_{2,U}(M) \xrightarrow{r} H^k_{2,U}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H^{k+1}_c(D)$$

est exacte. On va montrer que la L^2-cohomologie absolue à poids de $M \setminus D$ est nulle (c'est-à-dire $H^*_{2,U}(M\setminus D) = 0$). Soit donc α une forme de $L^2_U(M\setminus D)$, $(d + \delta_U)$-harmonique, et satisfaisant la condition absolue au bord $i_\nu\alpha = 0$. On considère une suite ρ_l de fonctions lisses définies sur $M \setminus D$, à supports bornés, vérifiant :

$$|\rho_l| \leq 1, \quad \rho_l \to 1\,(l \to \infty), \quad |d\rho_l| \leq 1, \quad \text{et } d\rho_l \to 0 \text{ sur les compacts.}$$

On applique alors l'inégalité 3.8 à $\rho_l\alpha$, puis on fait tendre l vers l'infini, pour montrer que α est nulle. Ceci montre que

$$H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(D),$$

et ceci pour tout ouvert $D = \{U < c\}$. En faisant tendre c vers l'infini, on trouve le résultat souhaité. □

3.2.2 Cas des variétés de volume fini, à courbure négative et pincée

Dans cette partie, (M^n, g) est une variété riemannienne complète de volume fini. On suppose de plus que la courbure sectionnelle K de M est négativement pincée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes a et b, avec

$$-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0.$$

On rappelle des résultats concernant la géométrie de telles variétés (voir [E], [He-I], ou encore le résumé de [L3]) : M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord. Si Σ est l'une des composantes (en nombre fini) du bord, il y a un bout correspondant. A tout rayon géodésique d'un bout, on associe une fonction de Busemann r (deux telles fonctions ne diffèrent que d'une constante). Dans le cas général, r est seulement de classe C^2. Si B est un bout associé à la composante de bord Σ, alors B est C^2-difféomorphe à $]0,\infty[\times\Sigma$, les tranches $\{t\}\times\Sigma$ étant les niveaux d'une fonction de Busemann r. Par ce difféomorphisme, la métrique s'écrit

$$g = dr^2 + g_r,$$

où les g_r sont une famille de métriques sur Σ.

La preuve du théorème 3.4 s'adapte aussi au cas des variétés de volume fini, à courbure négative et pincée :

Corollaire 3.5. *Soit (M^n, g) une variété complète de volume fini, à courbure sectionnelle K négative et pincée : il existe deux constantes strictement positives a et b telles que $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Soient k un entier et $U : M \to \mathbb{R}$ une fonction qui sur chaque bout de M est de la forme $U = Cr$, où r est une fonction de Busemann associée au bout, et $C > 0$ une constante vérifiant $C > (n-k+1)b - (k-2)a$. Alors on a l'isomorphisme $H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(M)$.*

Démonstration. On procède de manière similaire à la preuve précédente (théorème 3.4), en majorant le membre de gauche de la formule d'intégration par parties 3.7. Pour cela, on se sert du théorème de comparaison des hessiens de Greene et Wu (voir [G-W, p. 19]) qui montre que si $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ sont les valeurs propres du hessien $Hess(r)$ d'une fonction de Busemann, alors $\lambda_1 = 0$, et $-b \leq \lambda_i \leq -a$, pour $i \geq 2$. Ainsi, avec les notations de l'inégalité 2.3, on a $-\varepsilon_{n-k} \leq (n-k)b - (k-1)a$, donc pour toute forme α de degré k, on a

$$2Hess(U)(\alpha,\alpha) + (\Delta U)|\alpha|^2 - |\nabla U|^2|\alpha|^2 \quad \leq \quad C((n-k)b - (k-1)a - C)|\alpha|^2$$

puis on conclut comme avant : zéro n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_U en degré k, et la L^2-cohomologie à poids absolue à l'infini est nulle en degrés k et $k-1$. □

Remarques.

i) Comme on l'a déjà suggéré, on peut faire des raisonnements analogues si on considère le poids e^{-U}. Ainsi, si M et U vérifient les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème 3.4, avec $1 + 2nC_1 - nC_2 > 0$ (ou bien $C_1 \leq 0$ et $1 - nC_2 > 0$), alors la L^2-cohomologie à poids de M, associée au poids e^{-U}, est isomorphe à la cohomologie réelle de M. De façon similaire, si M et U sont comme dans le corollaire précédent, avec $C > 2nb - (n-1)a$, alors la L^2-cohomologie associée au poids e^{-U} est aussi isomorphe à la cohomologie réelle.

ii) Après la preuve de la proposition 5.1, nous donnerons une petite amélioration de ce corollaire : il suffit en fait de supposer que $C > (n-k)b - (k-1)a$.

3.2.3 Cas des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes

Nous allons considérer ici des variétés asymptotiquement hyperboliques complexes au sens de Biquard et Herzlich ("ACH" dans la terminologie de [B-H]) . Nous rappelons d'abord la construction de ces deux auteurs. Soit Σ^{2m-1} une variété de dimension (réelle) $2m-1$, pseudo-convexe, munie d'une structure de contact CR. Si η est une forme de contact, et J une structure presque-complexe compatible sur l'hyperplan de contact H, on dispose sur cet hyperplan de contact de la métrique $\gamma(.,.) = d\eta(.,J.)$, ce qui permet de munir la variété $[0,\infty[\times\Sigma$ de la métrique

$$g_0 = dr^2 + e^{2r}\eta^2 + e^r\gamma, \tag{3.9}$$

et on dit que g_0 est une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Les exemples de telles variétés sont les quotients convexes cocompacts de l'espace hyperbolique complexe, ou encore les domaines fortement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^m$ munis de leur métrique de Bergmann.

Dans la suite, on supposera que Σ est compacte sans bord. Grâce aux calculs de [B-H], nous allons déterminer les espaces de L^2-cohomologie à poids d'une variété ayant des bouts asymptotiquement hyperboliques complexes, pour des poids bien choisis. Pour cela, nous allons diagonaliser le hessien Hr dans une bonne base. Tout d'abord, notons par R le champ de Reeb associé à la forme de contact η :

$$i_R\eta = 1,\ i_R d\eta = 0.$$

La structure presque-complexe J sur l'hyperplan de contact H se prolonge en une structure presque-complexe sur $[0,\infty[\times\Sigma$ en posant $J\partial_r = e^{-r}R$. On considère alors un repère $g-$orthonormal adapté à J : si h_1, Jh_1, $\ldots$,h_{m-1}, Jh_{m-1} est un repère orthonormal de H pour γ, on pose $e_1 = \partial_r$, $e_2 = J\partial_r = e^{-r}R$, $e_3 = e^{-r/2}h_1$, $e_4 = e^{-r/2}Jh_1$, $\ldots$,$e_{2m-1} = e^{-r/2}h_{m-1}$, $e_{2m} = e^{-r/2}Jh_{m-1}$. Un calcul analogue à celui de [B-H, lemme 2.1] montre que $Hess(r)$ se diagonalise dans cette base, avec les valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m} = 1/2$. Les méthodes déjà exposées aux paragraphes précédents (preuves du théorème 3.4 et du corollaire 3.5) montrent donc :

Corollaire 3.6. *Soit (M^{2m},g) une variété riemannienne qui, en dehors d'un compact, est isométrique à une variété asymptotiquement hyperbolique complexe de la forme $[0,\infty[\times\Sigma$ (Σ close) portant la métrique 3.9. Soient k un entier, et $U : M \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur M qui en dehors d'un compact est de la forme $U = Cr$, où C est une constante qui vérifie $C > k+1-m$. Alors on a l'isomorphisme $H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(M)$.*

Démonstration. Il suffit de voir, en utilisant l'inégalité 2.3, que pour toute k-forme α, on a

$$2Hess(U)(\alpha,\alpha) + (\Delta U)|\alpha|^2 - |\nabla U|^2|\alpha|^2 \leq C(k+1-m-C)|\alpha|^2.$$

Ceci montre d'une part que zéro n'est pas dans le spectre essentiel de Δ_U en degré k, et d'autre part que la L^2-cohomologie à poids à l'infini en degrés $k-1$ et k est nulle ; puis on conclut comme précédemment à l'aide de la suite exacte. □

Remarques.

i) Le résultat reste encore vrai si chaque bout porte une métrique quasi-isométrique à la métrique 3.9. C'est en particulier le cas si on a une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe au sens général de [B-H] : en dehors d'un compact, M est difféomorphe à $[0,\infty[\times\Sigma$, et $g-g_0 \in e^{-\delta r}C^\infty$ pour un δ strictement positif. Même mieux, il suffit de demander qu'en dehors de ce compact, $g-g_0$ soit bornée par rapport à g_0, de norme inférieure strictement à un.

ii) Encore une fois, on peut aussi considérer les poids e^{-U}, et si $C > 3m-2$, alors la L^2-cohomologie associée au poids e^{-U}, est isomorphe à la cohomologie réelle de M.

En fait, nous pouvons aussi obtenir des résultats partiels pour le cas où le poids est nul :

Théorème 3.7. *Soit (M^{2m}, g) une variété riemannannienne de dimension $2m$ telle qu'en dehors d'un compact, M soit isométrique à une variété $[0,\infty[\times\Sigma$ portant une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe. Alors on a les isomorphismes*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H_c^k(M), & si\ k < m-1, \\ H^k(M), & si\ k > m+1. \end{cases}$$

De plus, $H_c^{m-1}(M)$ s'injecte dans $H_2^{m-1}(M)$ et $H_2^{m+1}(M)$ se surjecte dans $H^{m+1}(M)$.

Démonstration. Par dualité, il suffit de traiter les degrés $k < m$. Soit D un ouvert borné tel qu'on ait $M \setminus D = [0,\infty[\times\Sigma$. On rappelle que les valeurs propres du hessien $Hess(r)$ sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \ldots = \lambda_{2m} = 1/2$. Si I est un multi-indice de longueur k, on a donc

$$\sum_{i\in I}\lambda_i - \sum_{i\notin I}\lambda_i \leq (2k+2-2m)/2.$$

L'inégalité 2.3 donne alors que pour toute $k-$forme α définie sur $M\setminus D$, on a

$$2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 \leq (k+1-m)|\alpha|^2.$$

Ceci prouve, grâce à la formule d'intégration par parties du corollaire 2.11 que zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k, pour $k < m-1$. Par le corollaire 2.8, pour tout $p \leq m-1$, on a la suite exacte

$$H_2^{p-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^p(D) \xrightarrow{e} H_2^p(M) \xrightarrow{r} H_2^p(M \setminus D).$$

Il suffit donc de montrer que $H_2^p(M \setminus D) = 0$, pour $p < m-1$, ce qui se fait encore en utilisant une formule d'intégration par parties (théorème 2.10) et l'estimation ci-dessus sur le hessien de r. □

3.2.4 Géométries "à la Mazzeo-Melrose"

Dans ce paragraphe, on considère une variété compacte à bord $\overline{M}$. On suppose que le bord ∂M est l'espace total d'une fibration $\pi : \partial M \to B$, de fibre F. R. Mazzeo et R. Melrose [M-M] ont introduit et étudié entre autres deux classes particulières de métriques complètes à l'intérieur d'une telle variété : les métriques à cusp fibré ("fibred cusp metric") et les métriques à bord fibré ("fibred boundary metric"). Dans [H-H-M], T. Hausel, E. Hunsicker et R. Mazzeo identifient les espaces de formes harmoniques L^2 de ces métriques à certains espaces de cohomologie d'intersection. Leur méthode consiste à relier L^2-cohomologie et L^2-cohomologie à poids et à calculer la L^2-cohomologie à poids. Nous nous contentons ici de calculer certains espaces de L^2-cohomologie à poids (voir le corollaire 4 de [H-H-M]). Rappelons d'abord comment sont construites ces métriques (voir par exemple [H-H-M]). Soient h une métrique sur la base B, et l un 2-tenseur symétrique sur ∂M, qui est une métrique en restriction à chaque fibre. $\pi^*(h) + l$ est alors une métrique sur ∂M. On suppose que l est nul en restriction à l'espace horizontal (qui est l'orthogonal du sous-fibré vertical), i.e. π est une fibration riemannienne. De plus, nous identifierons le sous-fibré horizontal au fibré tangent de B. Soit $V = [0, \varepsilon[\times \partial M$ ($\varepsilon > 0$) un voisinage collier du bord ∂M dans $\overline{M}$; on notera y la coordonnée sur $[0, \varepsilon[$. Les deux géométries considérées ont le comportement suivant sur le voisinage V :

– métrique à cusp fibré

$$g_{cf} = \frac{dy^2}{y^2} + \pi^*(h) + y^2 l,$$

– métrique à bord fibré

$$g_{bf} = \frac{dy^2}{y^4} + \frac{\pi^*(h)}{y^2} + l.$$

Ces deux métriques sont reliées de façon simple par un facteur conforme :

$$g_{cf} = y^2 g_{bf}.$$

En posant $y = e^{-r}$, on obtient

$$g_{cf} = dr^2 + \pi^*(h) + e^{-2r}l, \tag{3.10}$$

et en posant $y = 1/r$, il vient

$$g_{bf} = dr^2 + r^2\pi^*(h) + l. \tag{3.11}$$

La technique de preuve du théorème 3.4 permet de retrouver [H-H-M, corollaire 4] :

Corollaire 3.8. *Soit $\overline{M}^n$ une variété compacte à bord de dimension n, dont le bord ∂M est l'espace total d'une fibration $\pi : \partial M \to B$, de fibre F. Soient k un entier, et $C > \mathrm{dim(F)} - 2(\mathrm{k} - 2 - \mathrm{dim(B)})_+ \geq 0$ une constante, où $(k-2-\mathrm{dim(B)})_+$ désigne la partie positive de $k-2-\mathrm{dim(B)}$.*

a) On suppose M est munie d'une métrique à cusp fibré 3.10. Soit U une fonction définie sur M qui vaut Cr en dehors d'un compact. Alors on a l'isomorphisme $H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(M)$.

b) On suppose que M est munie d'une métrique à bord fibré 3.11. Soit U une fonction définie sur M qui vaut $(C+2k-n)\ln(r)$ en dehors d'un compact. Alors on a l'isomorphisme $H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(M)$.

Démonstration. Pour a), il suffit de calculer le hessien de la fonction r sur un voisinage de l'infini. On note $b = \mathrm{dim(B)}$. Soit $e_1 = \nabla r$. On complète e_1 en un repère local g_{cf}-orthonormal $e_1, \ldots, e_n$ de M de la façon suivante : on choisit $e_2, \ldots, e_{b+1}$ comme relevés au sous-fibré horizontal d'un repère local h-orthonormal de B, et $e_{b+2}, \ldots, e_n$ comme un repère orthonormal local de la fibre F pour la métrique $e^{-2r}l$ (obtenu à partir d'un repère local orthogonal pour l). Dans le repère $e_1, \ldots, e_n$, le hessien de r se diagonalise, de valeurs propres $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{b+1} = 0$, et $\lambda_{b+2} = \ldots = \lambda_n = -1$. Ainsi, pour toute $k-$forme α, on a

$$2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 - C|\alpha|^2 \leq (\mathrm{dim(F)} - 2(\mathrm{k}-1-\mathrm{dim(B)})_+ - \mathrm{C})|\alpha|^2,$$

ce qui permet de conclure.

Pour b), on se sert du fait que $g_{cf} = y^2 g_{bf}$ pour relier la L^2-cohomologie à poids de g_{cf} à celle de g_{bf} (pour un autre poids) ; ceci est aussi utilisé dans [H-H-M]. En effet, si s est une constante, et g l'une des deux métriques g_{cf} ou g_{bf}, on note par $L^2(\Lambda^k T^*M, g, s)$ l'ensemble des $k-$formes qui sont de carré intégrable pour la mesure $y^s \mathrm{dv_g}$. On a alors

$$L^2(\Lambda^k T^*M, g_{cf}, s) = L^2(\Lambda^k T^*M, g_{bf}, s-2k+n).$$

Mais la L^2-cohomologie à poids de g par rapport au poids $y^s = e^{s\ln(y)}$, en degré k, ne fait intervenir dans sa définition que l'espace $L^2(\Lambda^k T^*M, g, s)$, d'où il vient :

$$H^k_{2,s\ln(y)}(M, g_{cf}) = H^k_{2,(s-2k+n)\ln(y)}(M, g_{bf}).$$

Le point b) découle alors de a) □

Remarque. Revenant à la variable y, le poids est y^{-C} pour a), et $y^{-C-2k+n}$ pour b).

3.3 Quelques autres géométries

3.3.1 Certains produits tordus

On considère ici des variétés dont chacun des bouts est isométrique à une variété de la forme $B =]0,\infty[\times K$ (avec K une variété compacte sans bord) munie d'une métrique qui s'écrit

$$dr^2 + F(r)^2 d\theta^2,$$

où F est une fonction strictement positive, et $d\theta^2$ est une métrique sur K. Les formes harmoniques de telles variétés ont par exemple été étudiées dans [D], [Br] et [C2], où les auteurs obtiennent des résultats d'annulation et de finitude.

Nous allons donner une interprétation topologique de ces espaces dans certains cas particuliers. Dans un repère orthonormal local $e_1 = \nabla r, e_2, \ldots, e_n$ de B (avec $e_2, \ldots, e_n$ un repère orthogonal de K pour la métrique $d\theta^2$), le hessien de la fonction r se diagonalise : il vaut zéro sur $e_1 = \nabla r$, et F'/F sur les autres vecteurs. Ainsi, si α est une $k-$forme, on a :

$$2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 = \frac{F'}{F}[(2k-(n-1))|\alpha|^2 - 2|i_{\nabla r}\alpha|^2].$$

Si on suppose que $F'/F \geq C > 0$ pour une constante C, alors en utilisant la double inégalité $0 \leq |i_{\nabla r}\alpha|^2 \leq |\alpha|^2$, on obtient

$$\begin{aligned} 2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 &\geq C[2k-2-(n-1)]|\alpha|^2, \\ 2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 &\leq C[2k-(n-1)]|\alpha|^2. \end{aligned}$$

On peut aussi faire un raisonnement analogue si on suppose que $F'/F \leq -C < 0$. Ainsi, les méthodes des paragraphes précédents permettent d'affirmer :

Théorème 3.9. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne. On suppose que M se décompose en $D \cup_i B_i$ où D est une variété compacte à bord, et chaque bout B_i est isométrique à un produit tordu de la forme $]0,\infty[\times K_i$ portant la métrique $dr^2 + F_i^2(r)d\theta_i^2$.*

a) *S'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout i on ait $F_i'/F_i > C$, alors*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H_c^k(M), & \text{si } k \leq (n-1)/2, \\ H^k(M), & \text{si } k \geq (n+1)/2. \end{cases}$$

b) *S'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout i on ait $F_i'/F_i < -C$, alors*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & si\ k < (n-1)/2, \\ \mathrm{Im}(H_c^k(M) \to H^k(M)), & si\ k = n/2, (n \pm 1)/2 \\ H_c^k(M), & si\ k > (n+1)/2. \end{cases}$$

Démonstration. On fait la démonstration par exemple uniquement pour le cas b). Par dualité, il suffit de considérer les degrés $k \leq n/2$. Pour $k < (n-3)/2$, on raisonne comme dans le point 1. de la preuve du théorème 3.1 : les estimées sur le hessien des fonctions F_i montrent qu'on a une inégalité de Poincaré à l'infini pour $k < (n-1)/2$, donc on a une suite exacte comme dans le corollaire 2.8. Les mêmes estimées montrent que pour $k < (n-1)/2$, la L^2-cohomologie relative à l'infini est nulle, ce qui donne bien les isomorphismes souhaités pour $k < (n-3)/2$.

Maintenant, le cas où n est pair (respectivement impair), et où $k = (n-2)/2$ (respectivement $k = (n-3)/2$) se traite comme dans le point 2. de la démonstration du théorème 3.1.

Supposons que $n = 2m+1$ est impair, et montrons le résultat pour le degré $k = (n-1)/2 = m$. Si on veut raisonner comme dans le point 3. de la démonstration du théorème 3.1, il suffit d'avoir l'annulation de la L^2-cohomologie absolue et relative de $M \setminus D$ en degré m. Mais ces annulations découlent du théorème 2 de [G-K-S], que nous rappelons brièvement (on n'oubliera pas de noter que dans le théorème de [G-K-S], la dimension de la variété est $n+1$ et non n) : soient (Σ, h) une variété riemannienne de dimension $n-1$, u un réel et $([u, \infty[\times\Sigma, dr^2 + g(r)^2 h)$ un produit tordu, où $g : [u, \infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction. Soit j un entier. Si

$$\int_u^\infty g^{2j-n-1}(r)\, dr = \infty,$$

alors $H_2^j([u, \infty[\times\Sigma, \{u\} \times \Sigma) = 0$, et si

$$\int_u^\infty g^{n-1-2j}(r)\, dr = \infty,$$

alors $H_2^j([u, \infty[\times\Sigma) = 0$.

Enfin, pour le degré $n/2$, on utilise l'invariance conforme de la L^2-cohomologie en degré moitié : dans ce cas, chaque bout est conformément équivalent à un cylindre, et on finit ensuite comme dans le point 3. de la preuve du théorème 3.1. □

Remarques.

i) Si dans la formule d'intégration par parties, on choisit une fonction de la forme $f(r)$, avec $f' = F$, alors on a

$$2Hess(f)(\alpha, \alpha) + (\Delta f)|\alpha|^2 = F'(2k-n)|\alpha|^2.$$

Alors pour toute forme à support compact dans un bout, le corollaire 2.11 donne :

$$\left| \int (2k-n)F'|\alpha|^2 \right| \leq 2 \sup_{support(\alpha)} (F(r)) \left[\|d\alpha\|_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2} \right] \|\alpha\|_{L^2}.$$

Si on suppose que F' est de signe constant (sans s'annuler) et que F est bornée, ceci montre que pour $k \neq n/2$, l'opérateur $d+\delta$ est non parabolique à l'infini en restriction aux $k-$formes, et donc que les espaces de formes harmoniques qui correspondent sont de dimension finie (voir [C3]). En toute rigueur, le résultat de [C3] ne s'applique que si l'opérateur $d+\delta$ est non parabolique à l'infini globalement, c'est-à-dire sur tous les degrés. Cependant, la même preuve s'adapte à notre cas. Remarquons aussi que dans [C2], G. Carron obtient un meilleur résultat si f est concave ($F' < 0$) : dans ce cas, et sans autre hypothèse sur F, l'opérateur $d+\delta$ est non-parabolique à l'infini (voir la remarque qui suit [C2, proposition 5.1]).

ii) Dans [C4, théorème 4.9], G. Carron obtient des conditions suffisantes sur certaines variétés dont l'infini est un produit tordu, pour que celles-ci vérifient les deux suites exactes du corollaire 2.8 pour tous les degrés. De plus, le résultat de [G-K-S] permet d'obtenir des annulations de L^2-cohomologie relative ou absolue à l'infini. Nous pouvons donc en déduire des calculs d'espaces de formes harmoniques L^2. Par exemple, si en dehors d'un compact D, une variété (M^n, g) est isométrique à un produit tordu $([1, \infty[\times \partial D, dr^2 + r^2 d\theta^2)$, ses espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie. De plus, si on note $p = E(n/2)$ la partie entière de $n/2$, et si la première valeur propre λ du laplacien agissant sur les $p-$formes fermées de ∂D vérifie $\lambda > (7 + (-1)^n)/8$, alors les deux suites exactes du corollaire 2.8 sont vraies pour tous les degrés. Mais d'après [G-K-S], la L^2-cohomologie absolue (respectivement relative) de $M \setminus D$ est nulle pour les degrés $k \leq n/2$ (respectivement $k \geq n/2$). On a donc : $H_2^k(M) \simeq H_c^k(M)$ si $k \leq n/2$, et $H_2^k(M) \simeq H^k(M)$ si $k \geq n/2$.

3.3.2 Application aux variétés conformément compactes

Dans cette partie, (M^n, g) est une variété conformément compacte (voir le paragraphe 2.3.3). Nous allons voir comment le théorème 3.9 permet de retrouver plus simplement le résultat de Mazzeo [M] concernant la L^2-cohomologie :

Corollaire 3.10 (Mazzeo). *Soit (M^n, g) une variété conformément compacte. Alors on a les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H_c^k(M), & si\ k \leq (n-1)/2, \\ H^k(M), & si\ k \geq (n+1)/2. \end{cases}$$

Démonstration. On va montrer (et c'est certainement bien connu) qu'à l'infini, M est quasi-isométrique à un produit tordu $[0,\infty[\times\partial M$ portant la métrique $dr^2+e^{2r}d\theta^2$. Comme la L^2-cohomologie est invariante par quasi-isométries, on aura le résultat grâce au théorème 3.9. D'abord, remarquons que si $\tilde{g}$ et $\tilde{y}$ sont respectivement une autre métrique sur $\overline{M}$ et une autre fonction définissant le bord, alors les métriques $\overline{g}/y^2$ et $\tilde{g}/\tilde{y}^2$ sont quasi-isométriques. En effet, les métriques $\overline{g}$ et $\tilde{g}$ étant définies sur $\overline{M}$ qui est compacte, elles sont comparables, et comme y et $\tilde{y}$ s'annulent exactement sur ∂M à l'ordre zéro, y et $\tilde{y}$ sont aussi comparables, et $\overline{g}/y^2$ et $\tilde{g}/\tilde{y}^2$ sont bien quasi-isométriques. Ensuite, si $\overline{g}$ est une métrique donnée, on peut toujours choisir y de sorte que la norme de dy par rapport à $\overline{g}$ le long du bord ∂M soit constante : on note $a(\theta)$ cette norme (θ est la variable sur ∂M), et on peut remplacer y par y/a sur un voisinage de ∂M. On a alors $d(y/a)=dy/a+yd(1/a)=dy/a$ sur ∂M. En résumé, on peut supposer que notre métrique conformément compacte est asymptotiquement hyperbolique. Mais pour une telle métrique, la quasi-isométrie avec le produit tordu souhaité découle par exemple des travaux de Graham (voir [Gr]). □

4 Un détour par les travaux d'Ohsawa

4.1 Pseudo-paires de Runge

Dans [O] (voir aussi [O-T]), T. Ohsawa développe une théorie afin d'obtenir des théorèmes d'isomorphisme pour les groupes de cohomologie d'une large classe de variétés complexes. Sa théorie des "pseudo-paires de Runge" est en effet assez générale, et permet de comparer les groupes de L^2-cohomologie et de cohomologie ordinaire.

Nous rappelons ici les notions exposées dans [O] et [O-T]. Soient X une variété complexe, et E un fibré holomorphe au-dessus de X. Pour deux entiers p et q, on note par $C_0^\infty(\Lambda^{p,q}T^*X,E)$ l'ensemble des (p,q)-formes lisses, à support compact, à valeurs dans E. L'opérateur $\overline{\partial}$ agit de $C_0^\infty(\Lambda^{p,q}T^*X,E)$ vers $C_0^\infty(\Lambda^{p,q+1}T^*X,E)$. Lorsque X et E sont munis de métriques, on peut aussi définir l'espace $L^2(\Lambda^{p,q}T^*X,E)$ des (p,q)-formes à valeurs dans E qui sont de carré intégrable. L'opérateur $\overline{\partial}$ agit de manière non bornée sur L^2, et son adjoint sera noté $\overline{\partial}^*$. Considérons maintenant l'espace $\Omega_2^{p,q}(X,E)$ formé des (p,q)-formes de carré intégrable, dont l'image par $\overline{\partial}$ est, au sens des distributions, dans L^2. La cohomologie réduite du complexe $(\Omega_2^{p,q}(X,E),\overline{\partial})$ sera notée $H_2^{*,*}(X,E)$:

$$H_2^{p,q}(X,E)=\{\alpha\in L^2(\Lambda^{p,q}T^*X,E)/\,\overline{\partial}\alpha=0\}/\overline{\overline{\partial}\Omega_2^{p,q-1}(X,E)}.$$

Dans la définition qui suit, les différents objets qui dépendent d'un entier k seront indicés par k.

Définition 4.1. *Soient $X_1 \subset X_2$ deux ouverts de X. On dit que (X_1, X_2) est une pseudo-paire de Runge par rapport à E en bidegré (p,q) s'il existe une métrique hermitienne complète g_0 sur X_1, une métrique hermitienne h_0 sur $E|_{X_1}$, ainsi qu'une suite de métriques hermitiennes complètes g_k, $k \geq 1$ sur X_2, et une suite de métriques hermitiennes h_k sur $E|_{X_2}$ vérifiant :*

(1) g_k, h_k et leurs dérivées convergent uniformément vers g_0, h_0 et leurs dérivées repsectivement, sur les compacts de X_1.

(2) (Inégalités de Poincaré à l'infini uniformes)Il existe un compact K de X_1, et une constante $C_1 > 0$ tels que pour tout $k \geq 1$, et toute forme $\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^{p,q+1}T^*X_2, E)$, on ait

$$||\alpha||^2_{L^2(X_2,E)_k} \leq C_1 \left[||\overline{\partial}\alpha||^2_{L^2(X_2,E)_k} + ||\overline{\partial}^*_k \alpha||^2_{L^2(X_2,E)_k} + \int_K |\alpha|^2_k dv_{g_k} \right].$$

(3) $L^2(\Lambda^{p,q}T^*X_2, E)_k \subset L^2(\Lambda^{p,q}T^*X_2, E)_{k+1}$, et il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$, $j = 0, 1$, et toute forme $\alpha \in L^2(\Lambda^{p,q+j}T^*X_2, E)_k$, on ait

$$||\alpha|_{X_1}||_{L^2(\Lambda^{p,q+j}T^*X_1,E)_0} \leq C_2 ||\alpha||_{L^2(\Lambda^{p,q+j}T^*X_2,E)_k}.$$

Un des résultats de [O] est le suivant (voir le théorème 3.2 du chapitre 2 de ce papier)

Théorème 4.2. *Soit (X_1, X_2) une pseudo-paire de Runge par rapport à E en bidegrés (p,q) et $(p, q+1)$. Alors il existe un entier k_0 tel que les applications naturelles de restriction*

$$H_2^{p,q+1}(X_2, E)_k \to H_2^{p,q+1}(X_1, E)_0$$

soient des isomorphismes pour $k \geq k_0$.

Remarque. En fait, Ohsawa considère plutôt la L^2-cohomologie non réduite, mais sous l'hypothèse (2) de la définition précédente, il montre que l'image de $\overline{\partial}$ est fermée, et donc L^2-cohomologie réduite et non réduite coïncident.

4.2 Une légère modification

Ici, nous nous contentons de voir que la méthode d'Ohsawa marche dans un cadre plus simple et légèrement different. Tout d'abord, nous avons besoin d'introduire la définition suivante, qui est l'équivalent de la notion de pseudo-paire de Runge chez Ohsawa (voir la définition 4.1) :

Définition 4.3. *Soient (M, g) une variété riemannienne complète, k un entier, et $U : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur M. On considère une suite de fonctions $U_p : M \to \mathbb{R}$ définies sur M, de classe C^2. On dit que la suite U_p est une bonne suite de poids par rapport à U en degré k si elle satisfait aux conditions suivantes :*

(1) Pour tout compact L de M, il existe un entier p_0 (dépendant de L) tel que $U_p|L = U|L$ pour $p \geq p_0$.

(2) (Inégalités de Poincaré à l'infini uniformes) Il existe un compact K de M, et une constante $C_1 > 0$ tels que pour tout $p \geq 1$, l'on ait

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M)),\ ||\alpha||^2_{L^2_{U_p}} \leq C_1 \left[||d\alpha||^2_{L^2_{U_p}} + ||\delta_{U_p}\alpha||^2_{L^2_{U_p}} + \int_K |\alpha|^2 dv_{U_p} \right].$$

(3) $L^2_{U_p}(\Lambda^j T^*M) \subset L^2_{U_{p+1}}(\Lambda^j T^*M)$, et il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $||.||_{L^2_U(\Lambda^j T^*M)} \leq C_2 ||.||_{L^2_{U_p}(\Lambda^j T^*M)}$, pour tout $p \geq 1$, et $j = k-1, k$.

Remarque. Il n'est pas difficile de voir que la condition (2) est équivalente à : il existe un compact K' de M, et une constante $C' > 0$ tels que pour tout $p \geq 1$, l'on ait

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M \setminus K')),\ ||\alpha||^2_{L^2_{U_p}} \leq C' \left[||d\alpha||^2_{L^2_{U_p}} + ||\delta_{U_p}\alpha||^2_{L^2_{U_p}} \right],$$

et dans la pratique, c'est cette condition qu'on vérifiera.

Théorème 4.4. *Soient (M, g) une variété riemannienne complète, k un entier, et $U : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définie sur M. On suppose qu'il existe une bonne suite de poids U_p par rapport à U en degrés k et $k+1$ (c'est la même suite pour les deux degrés). Alors il existe un entier p_0 tel que les applications naturelles $H^k_{2,U_p}(M) \to H^k_{2,U}(M)$ soient des isomorphismes pour $p \geq p_0$.*

Comme notre cadre est un peu différent de celui considéré par Ohsawa, et pour être plus complet, nous refaisons la démonstration de ce théorème en reprenant les arguments de la preuve de [O, théorème 3.2, chapitre 2]. Pour cela, nous avons besoin tout d'abord de quelques résultats préliminaires. Dans la suite, M est une variété riemannienne complète, et U une fonction de classe C^2 définie sur M. En premier lieu, l'analogue de [O, lemme 2.2, chapitre 2] est

Proposition 4.5. *On suppose qu'il existe une bonne suite de poids U_p par rapport à U en degré k. Alors il existe un entier p_0 et une constante $C_3 > 0$ tels que pour tout $p \geq p_0$ l'on ait*

$$\forall \alpha \in L^2_{U_p}(\Lambda^k T^*M),\ \alpha \perp_U \mathcal{H}^k_U,\ ||\alpha||^2_{L^2_{U_p}} \leq C_3 \left[||d\alpha||^2_{L^2_{U_p}} + ||\delta_{U_p}\alpha||^2_{L^2_{U_p}} \right].$$

Démonstration. Nous reprenons le raisonnement de [O, lemme 2.2, chapitre 2], en supposant que la conclusion de la proposition est fausse. Alors il existe une suite de $k-$formes α_p vérifiant

$$\alpha_p \in L^2_{U_p},\ ||\alpha_p||_{L^2_{U_p}} = 1,\ \alpha_p \perp \mathcal{H}^k_U,\ ||d\alpha_p||_{L^2_{U_p}} \leq 1/p,\ ||\delta_{U_p}\alpha_p||_{L^2_{U_p}} \leq 1/p.$$

Alors les α_p forment une suite bornée de L^2_U d'après l'hypothèse (3) (voir la définition 4.3), donc on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans L^2_U vers un élément α. Mais d'une part, α est $(d+\delta_U)-$harmonique : on va par exemple montrer que α vérifie $d\alpha = 0$ (la preuve de l'équation $\delta_U \alpha = 0$ est similaire). Soit donc φ une forme lisse à support compact dans M. Par convergence faible de α_p vers α dans L^2_U, on a

$$\langle \alpha, \delta_U \varphi \rangle_{L^2_U} = \lim_{p\to\infty} \langle \alpha_p, \delta_U \varphi \rangle_{L^2_U}$$

Or, pour p assez grand, U et U_p sont égales sur le support de φ (hypothèse (1) de la définition 4.3), donc l'équation précédente donne, pour toute φ lisse à support compact,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \delta_U \varphi \rangle_{L^2_U} &= \lim_{p\to\infty} \langle \alpha_p, \delta_{U_p} \varphi \rangle_{L^2_{U_p}} \\ &= \lim_{p\to\infty} \langle d\alpha_p, \varphi \rangle_{L^2_{U_p}} = 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité $||d\alpha_p||_{L^2_{U_p}} \leq 1/p$ pour conclure que la limite est nulle. Ceci prouve bien que α est fermée, et de même on montre que α est δ_U-fermée, et par conséquent $(d+\delta_U)-$harmonique. D'autre part, la convergence faible des α_p vers α, et le fait que chaque α_p est orthogonale, dans L^2_U, à l'espace $\mathcal{H}^k_U$ des formes $(d+\delta_U)-$harmoniques, montrent que α est aussi orthogonale, dans L^2_U, à $\mathcal{H}^k_U$. Donc finalement α est nulle.

Par ailleurs, l'hypothèse (1) montre aussi que les $(d+\delta_U)(\alpha_p)$ sont bornés sur les compacts. En effet, si L est un compact donné, et si p est assez grand pour que U et U_p coïncident sur L, alors on a

$$||(d+\delta_U)(\alpha_p)||_{L^2_U(L)} = ||(d+\delta_{U_p})(\alpha_p)||_{L^2_{U_p}(L)} \leq 2/p.$$

Soient maintenant L un compact qui contient K dans son intérieur, et ρ une fonction lisse à support compact dans l'intérieur de L, qui vaut 1 sur un voisinage de K. Les suites $\rho\alpha_p$ et $(d+\delta_U)(\rho\alpha_p)$ sont bornées dans $L^2(M)$, donc par des estimées elliptiques classiques pour l'opérateur $d+\delta_U$, la suite $(\rho\alpha_p)|_K = \alpha_p|_K$ est bornée dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(K)$ (voir par exemple le raisonnement de la preuve de [Ba, proposition 1]). D'après le théorème de compacité de Rellich, l'injection de $W^{1,2}(K)$ dans $L^2(K)$ (donc aussi dans $L^2_U(K)$) est compacte, donc on peut supposer que les α_p convergent fortement vers α sur le compact K (à une sous-suite près). Or, l'hypothèse (2) entraîne

$$\frac{1}{C_1} - \frac{2}{p^2} \leq \int_K |\alpha_p|^2 dv_{U_p},$$

et en passant à la limite quand p tend vers l'infini, on voit que

$$\frac{1}{C_1} \leq \int_K |\alpha|^2 dv_U,$$

ce qui contredit le fait que α est nulle. □

Avant d'énoncer la prochaine proposition, nous rappelons un résultat d'Hörmander [Ho, théorème 1.1.4] qui nous sera utile. Soient H_i, $i = 1, 2, 3$ trois espaces de Hilbert, de normes $||.||_i$ respectivement. On considère deux opérateurs non bornés et fermés $T : H_1 \to H_2$ et $S : H_2 \to H_3$ de domaines respectifs Dom(T) et Dom(S) denses, et tels que $S \circ T = 0$. On note par T^* l'adjoint de T.

Théorème 4.6 (Hörmander). *Soit F un sous-espace fermé de H_2 qui contient* Im(T). *On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall \alpha \in \mathrm{Dom(T^*)} \cap \mathrm{Dom(S)} \cap \mathrm{F},\ ||\alpha||_2^2 \leq \mathrm{c}\left[||\mathrm{T}^*\alpha||_1^2 + ||\mathrm{S}\alpha||_3^2\right].$$

Alors si $\beta \in \mathrm{Im(T^*)}$, il existe $\alpha \in \mathrm{Dom(T^*)}$, avec $T^*\alpha = \beta$ et $||\alpha||_2 \leq c^{-1/2}||\beta||_1$.

Nous pouvons maintenant prouver l'analogue du théorème 2.3, chapitre 2 de [O], avec la même méthode.

Proposition 4.7. *On suppose qu'il existe une bonne suite de poids U_p par rapport à U en degré k. Soit $\gamma \in \mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_U}}(\mathrm{d})$, de degré $k-1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p et un élément $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_{U_p}}}(\mathrm{d})$, de degré $k-1$, tels que*

$$||\tilde{\gamma} - \gamma||_{L^2_U} < \varepsilon.$$

Démonstration. La conclusion de la proposition signifie que l'espace $\left(\cup_{p\geq 1}\mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_{U_p}}}(\mathrm{d})\right) \cap L^2_U(\Lambda^{k-1}T^*M)$ est dense dans $\mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_U}}(\mathrm{d}) \cap \mathrm{L^2_U}(\Lambda^{k-1}\mathrm{T^*M})$. Il suffit donc de prouver que l'orthogonal du premier espace dans le deuxième est nul : soit $\alpha \in \mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_U}}(\mathrm{d})$ une forme de degré $k-1$ telle que

$$\forall p \geq 1,\ \forall \varphi \in \mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_{U_p}}}(\mathrm{d}),\ \langle \alpha, \varphi \rangle_{\mathrm{L^2_U}} = 0.$$

On va montrer que $\alpha = 0$, et pour cela on va montrer qu'il existe une forme β de degré k dans L^2_U telle que $\alpha = \delta_U \beta$.

D'abord, l'hypothèse (3) montre que pour tout p, la forme linéaire $\langle \alpha, . \rangle_{L^2_U}$ est continue sur $L^2_{U_p}$, de norme inférieure ou égale à $C_2||\alpha||_{L^2_U}$, donc on en déduit l'existence de $\alpha_p \in L^2_{U_p}$ telle que

$$\langle \alpha, . \rangle_{L^2_U} = \langle \alpha_p, . \rangle_{L^2_{U_p}},\ \text{ et } ||\alpha_p||_{L^2_{U_p}} \leq C_2||\alpha||_{L^2_U}.$$

Plus simplement, on a $\alpha_p = e^{U-U_p}\alpha$. D'après l'hypothèse (1), on voit alors que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M),\ \langle \alpha_p, \varphi \rangle_{L^2_U} \to \langle \alpha, \varphi \rangle_{L^2_U},$$

puisque pour tout compact fixé, il y a en fait égalité entre α et α_p pour tous les p assez grands.

D'autre part, l'hypothèse d'orthogonalité faite sur α, et la définition des α_p montrent que α_p est orthogonale à $\mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_{U_p}}}(\mathrm{d})$ dans $L^2_{U_p}$, donc est dans l'adhérence de l'image de δ_{U_p}. Or, cette image est fermée grâce aux inégalités de Poincaré à l'infini (2), par un raisonnement proche de celui de la preuve de la proposition 2.7 : supposons en effet qu'il existe une suite ψ_l de $k-$formes de $L^2_{U_p}$ telle que la suite $\delta_{U_p}\psi_l$ soit dans $L^2_{U_p}$, et converge dans cet espace vers une $(k-1)-$forme ω. L'inégalité de Poincaré à l'infini montre que 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien $\Delta_{U_p,k}$ agissant sur les $k-$formes (où $\Delta_{U_p} = (d+\delta_{U_p})^2$), donc on a un opérateur de Green G comme dans la proposition 2.6. Quitte à remplacer ψ_l par $dG_-\psi_l$, on peut supposer que les ψ_l sont exactes. On utilise alors encore une fois l'hypothèse sur le spectre essentiel pour en déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\psi \in \mathrm{Dom}((\mathrm{d}+\delta_{\mathrm{U_p}})_\mathrm{k}),\ \psi\perp\mathrm{Ker}(\Delta_{\mathrm{U_p,k}}),\ \mathrm{C}\|\psi\|^2_{\mathrm{L^2_{U_p}}} \leq \|\mathrm{d}\psi\|^2_{\mathrm{L^2_{U_p}}} + \|\delta_{\mathrm{U_p}}\psi\|^2_{\mathrm{L^2_{U_p}}}.$$

On en déduit facilement que ψ_l est une suite de Cauchy dans $L^2_{U_p}$, et qu'elle converge vers un élément ψ, avec $\delta_{U_p}\psi = \omega$. Ceci finit de montrer que l'image de δ_{U_p} est fermée dans $L^2_{U_p}$. On a donc

$$\alpha_p \in \mathrm{Im}(\delta_{\mathrm{U_p}}).$$

On va appliquer le théorème d'Hörmander 4.6 avec $H_i = L^2_{U_p}(\Lambda^{k+i-2}T^*M)$, $i = 1,2,3$, $T = S = d$, et F l'ensemble des k-formes de $L^2_{U_p}$ qui sont orthogonales à $\mathcal{H}^k_U$ dans $L^2_U(\Lambda^k T^*M)$. F est clairement fermé, et de plus il contient l'image de $T = d$: en effet, soient ξ un élément de $\mathcal{H}^k_U$, et $\gamma = T\eta = d\eta \in L^2_{U_p}(\Lambda^k T^*M) \subset L^2_U(\Lambda^k T^*M)$ un élément de Im(T), avec $\eta \in L^2_{U_p}(\Lambda^{k-1}T^*M) \subset L^2_U(\Lambda^{k-1}T^*M)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}\langle\xi,\gamma\rangle_{L^2_U} &= \langle\xi, d\eta\rangle_{L^2_U}\\ &= \langle\delta_U\xi,\eta\rangle_{L^2_U} = 0,\end{aligned}$$

l'intégration par parties qui fait passer de la première ligne à la deuxième étant justifiée car (M,g) est complète. On a donc bien $\mathrm{Im(T)} \subset \mathrm{F}$. Enfin, l'estimation dont on a besoin pour appliquer le théorème d'Hörmander est obtenue dans la proposition 4.5, avec la même constante $c = C_3$ pour tous les p assez grands. Ceci montre l'existence d'une constante C_4 et, pour tout p, d'une forme β_p de $L^2_{U_p}$ telles que

$$\delta_{U_p}\beta_p = \alpha_p, \text{ et } ||\beta_p||_{L^2_{U_p}} \leq C_4||\alpha_p||_{L^2_{U_p}}.$$

Il est alors facile de voir que les β_p sont bornées dans L^2_U (par $C_2^2C_4||\alpha||_{L^2_U}$), donc que les β_p convergent (à une sous-suite près, notée encore β_p) faiblement vers une forme β dans L^2_U. De plus, on a $\delta_U\beta = \alpha$: en effet, pour toute forme φ lisse à support compact, et pour tout p assez grand (dépendant du support de φ), on a d'après (1)

$$\langle\beta_p, d\varphi\rangle_{L^2_{U_p}} = \langle\beta_p, d\varphi\rangle_{L^2_U}.$$

Le membre de droite de cette égalité tend vers $\langle\beta, d\varphi\rangle_{L^2_U}$ par convergence faible. Quant au membre de gauche, on a

$$\langle\beta_p, d\varphi\rangle_{L^2_{U_p}} = \langle\delta_{U_p}\beta, \varphi\rangle_{L^2_{U_p}} = \langle\alpha_p, \varphi\rangle_{L^2_{U_p}} = \langle\alpha, \varphi\rangle_{L^2_U}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition. □

Démonstration du théorème 4.4. Grâce à (1) et (2), l'opérateur $(d + \delta_U)$ vérifie aussi une inégalité de Poincaré à l'infini, donc $H^k_{2,U}(M)$ est de dimension finie. Il suffit donc de montrer que pour p assez grand, l'application $H^k_{2,U_p}(M) \overset{i_p}{\to} H^k_{2,U}(M)$ est injective et d'image dense. Prouvons d'abord l'injectivité. Soit $[\alpha]$ une classe de $H^k_{2,U_p}(M)$ qui est nulle dans $H^k_{2,U}(M)$. Ceci signifie que n'importe quel représentant de cette classe est orthogonal, dans L^2_U, à l'espace $\mathcal{H}^k_U$. C'est en particulier vrai pour le représentant α qui est $(d + \delta_{U_p})$-harmonique. Mais les U_p forment une bonne suite de poids par rapport à U en degré k, donc d'après la proposition 4.5, un élément $(d + \delta_{U_p})$-harmonique qui est orthogonal, dans L^2_U, à $\mathcal{H}^k_U$, est forcément nul si $p \geq p_0$. Ceci montre que α est nulle, d'où l'injectivité de i_p pour $p \geq p_0$.

Passons maintenant à la densité de l'image. On a tout d'abord une inclusion $L^2_{U_p}(\Lambda^k T^*M) \subset L^2_{U_{p+1}}(\Lambda^k T^*M)$, car la suite U_p est une bonne suite de poids en degré k (ou $k+1$). Donc on voit que les images $\mathrm{Im(i_p)}$ forment une suite croissante de sous-espaces vectoriels de l'espace de dimension finie $H^k_{2,U}$. Ainsi, à partir d'un certain entier p_1, la suite de ces images est stationnaire. Soit maintenant $[\alpha]$ une classe de $H^k_{2,U}$, de représentant $\alpha \in \mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_U}}(\mathrm{d})$, et soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Comme les U_p sont une bonne suite de poids en degré $k+1$, et que α est de degré k, la proposition 4.7 donne l'existence d'un entier p', et d'un élément $\tilde{\alpha}$ de $\mathrm{Ker}_{\mathrm{L^2_{U_{p'}}}}(\mathrm{d})$ tels que

$$||\tilde{\alpha} - \alpha||_{L^2_U} < \varepsilon.$$

Mais la norme $||.||_{H^k_{2,U}}$ sur $H^k_{2,U}$ étant induite par celle de L^2_U, on en déduit que

$$||i_{p'}([\tilde{\alpha}]) - [\alpha]||_{H^k_{2,U}} < \varepsilon.$$

Comme $i_{p'}([\tilde{\alpha}])$ appartient à l'image commune des applications i_p, $p \geq p_1$, ceci montre la densité voulue. □

5 L^2-cohomologie des variétés de volume fini, à courbure négative

5.1 Cas des variétés réelles

Dans cette partie, (M^n, g) est une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini, à courbure sectionnelle K négative pincée : il existe des constantes a et b, telles que l'on ait $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Dans la troisième partie (corollaire 3.5), on a donné une interprétation topologique des espaces de L^2-cohomologie à poids de ces variétés, si le poids est bien choisi. Ici, nous allons comparer les espaces de L^2-cohomologie aux espaces de L^2-cohomologie à poids, grâce aux résultats de la partie précédente. Des travaux d'Ohsawa, on déduit d'abord la proposition suivante :

Proposition 5.1. *Soit (M^n, g), une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini, à courbure sectionnelle K négative pincée : il existe des constantes a et b, telles que l'on ait $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. On suppose que pour un entier $k < (n-1)/2$, on a $(n-1-k)a - kb =: \varepsilon > 0$. Alors on a l'isomorphisme :*

$$H_2^{n-k}(M) \simeq H_c^{n-k}(M).$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 4.4 avec une suite de poids bien choisis. Fixons d'abord une constante $C > 0$ qu'on choisira ensuite assez grande, et considérons une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifie

$$F(t) = 0 \quad \text{si t} \leq 0,$$

$$F(t) = Ct \quad \text{si t} \geq 1,$$

$$F' \geq 0.$$

On peut, sans perdre de généralités, supposer que M a un seul bout, et on note par r une fonction de Busemann associée. On considère alors une suite $U_p : M \to \mathbb{R}$ de fonctions de classe C^2 définies en $x \in M$ par

$$U_p(x) = F(r(x) - p).$$

Si x est fixé dans M, pour p assez grand, on a $U_p(x) = 0$, c'est-à-dire que l'hypothèse (1) de la définition 4.3 est vérifiée par $U \equiv 0$ et la suite U_p. L'hypothèse (3) est aussi facile à vérifier avec $C_2 = 1$. Nous allons voir que la condition (2) est aussi satisfaite en degrés $n-k$ et $n-k+1$. En effet, d'après la formule d'intégration par parties du corollaire 2.12, en prenant $f = r$, si α est une forme à support compact contenu dans le bout, on a

$$\int_M \left[2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 - F'(r-p)|\alpha|^2\right] \mathrm{dv_{U_p}} =$$
$$2\int_M \left[\langle i_{\nabla r} d\alpha, \alpha\rangle + \langle i_{\nabla r}\alpha, \delta_{U_p}\alpha\rangle\right] \mathrm{dv_{U_p}}. \quad (5.12)$$

Notons $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres du hessien Hr. D'après l'hypothèse sur les courbures sectionnelles, le théorème de comparaison des hessiens de Greene et Wu [G-W] nous donne $\lambda_1 = 0$, et $-b \leq \lambda_i \leq -a$, $i \geq 2$ sur le bout. Ainsi, en raisonnant comme dans le corollaire 2.13, si α est de degré $n-k$, on a

$$2Hess(r)(\alpha,\alpha) + (\Delta r)|\alpha|^2 \leq -\left[(n-k-1)a - kb\right]|\alpha|^2 = -\varepsilon|\alpha|^2.$$

Cette inégalité reste *a fortiori* vraie si α est de degré $n-k+1$. Comme on a $F' \geq 0$, on déduit de la formule d'intégration par parties 5.12 que pour toute $(n-k)$ ou $(n-k+1)$-forme α à support dans le bout :

$$\sqrt{\varepsilon}\|\alpha\|_{L^2_{U_p}} \leq 2\left[\|d\alpha\|_{L^2_{U_p}} + \|\delta_{U_p}\alpha\|_{L^2_{U_p}}\right].$$

Ceci montre que l'hypothèse (2) de la définition 4.3 est aussi vérifiée pour les degrés $n-k$ et $n-k+1$. Par conséquent, la suite U_p est une bonne suite de poids pour $U \equiv 0$ en degrés $n-k$ et $n-k+1$, donc d'après le théorème d'Ohsawa 4.4, pour p assez grand, on a

$$H^{n-k}_{2,U_p}(M) \simeq H^{n-k}_2(M).$$

Or, si on est assez loin sur le bout, la fonction U_p est égale à Cr, et par le corollaire 3.5, on sait dans ce cas que si la constante C est assez grande, alors

$$H^*_{2,U_p}(M) \simeq H^*_c(M).$$

Ceci achève la preuve de la proposition. $\square$

Remarques.

i) L'hypothèse $(n-1-k)a - kb > 0$ est exactement celle qui permet de savoir que 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k (voir [Do-X, théorème 4.2] et [B-B1, corollaire 5.4]). On verra que le résultat de la proposition 5.1 est optimal par rapport au pincement.

ii) Soient $C' > C > 0$ deux constantes, avec $C > (n-k)b - (k-1)a$. On considère une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F(t) = Ct$ si $t \leq 0$, $F(t) = C't$ si $t \geq 1$, et $F' \geq 0$. La preuve de la proposition précédente s'applique encore avec cette nouvelle fonction F et montre que $H^k_{2,U_p}(M) \simeq H^k_{2,U}(M)$, avec $U = Cr$ sur le bout. Mais d'après le corollaire 3.5, on $H^k_{2,U_p}(M) \simeq H^k_c(M)$ si C' est assez grande, donc $H^k_{2,U}(M) \simeq H^k_c(M)$. On obtient ainsi une amélioration du corollaire 3.5.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

Théorème 5.2. *Soit (M^n, g), une variété riemannienne complète de dimension n, de volume fini, à courbure sectionnelle K négative pincée : il existe des constantes a et b, telles que l'on ait $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. On suppose que $na - (n-2)b > 0$, alors on a les isomorphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :*

$$H^k_2(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & si\ k < (n-1)/2, \\ \mathrm{Im}(H^{n/2}_c(M) \to H^{n/2}(M)), & si\ k = n/2, \\ H^k_c(M), & si\ k > (n+1)/2. \end{cases}$$

Si de plus la courbure est constante ($a = b$), et la dimension est impaire, alors on a $H_2^{(n\pm1)/2}(M) \simeq \mathrm{Im}(H_c^{(n\pm1)/2}(M) \to H^{(n\pm1)/2}(M))$

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que M est orientable. Sinon, il suffit de considérer le revêtement à deux feuillets $\tilde{M}$ qui, lui, est orientable, en remarquant que si τ est l'automorphisme du revêtement, alors la L^2-cohomologie de M est isomorphe à la L^2-cohomologie $\tau-$invariante de $\tilde{M}$. L'avantage qu'on en tire est que sur une variété orientable, l'opérateur $*$ de Hodge réalise une isométrie entre les k et les $(n-k)-$formes harmoniques. Ainsi, on peut se limiter aux degrés k supérieurs ou égaux à $n/2$.

Pour les degrés $k \geq (n+1)/2$, la conclusion du théorème découle de la proposition 5.1 et du théorème 3.1.

Supposons que $n = 2m$, et traitons le degré $k = n/2 = m$. On sait que, sous nos hypothèses de courbure, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien agissant sur les formes [B-B1]. Les deux suites exactes du corollaire 2.8) sont donc vraies pour tous les degrés, et en particulier, pour tout ouvert borné D, on a :

$$H_c^m(D) \to H_2^m(M) \to H_2^m(M \setminus D),$$

et

$$H_2^m(M \setminus D, \partial D) \to H_2^m(M) \to H^m(D).$$

Sans perdre de généralités, on peut supposer que M a un seul bout, et on note par r une fonction de Busemann associée. On prend alors $D = \{r < c\}$ pour un réel c fixé, et on va montrer que $H_2^m(M \setminus D) = H_2^m(M \setminus D, \partial D) = 0$, si on choisit c assez grand. Alors les deux suites exactes ci-dessus donneront : $H_c^m(M)$ se surjecte dans $H_2^m(M)$, et $H_2^m(M)$ s'injecte dans $H^m(M)$. Mais d'après Anderson [An] (voir aussi [L1], [C4] et la proposition 1.7), $\mathrm{Im}(H_c^m(M) \to H^m(M))$ s'injecte toujours dans $H_2^m(M)$, donc on en déduira que $H_2^m(M) \simeq \mathrm{Im}(H_c^m(M) \to H^m(M))$.

Il nous reste donc à montrer que $H_2^m(M \setminus D) = H_2^m(M \setminus D, \partial D) = 0$. Pour cela, on considère la variété double $X_c = (M \setminus D)\sharp(-M \setminus D)$ obtenue en recollant deux copies de $M \setminus D$ le long de ∂D. X_c porte une métrique naturelle qui coïncide avec celle de $M \setminus D$ sur chacune des copies. Cette métrique n'est pas lisse, mais seulement lipschitzienne ; cependant, ceci est suffisant pour définir l'opérateur δ et toute l'analyse précédente reste valable. La L^2-cohomologie de X_c vérifie alors (voir par exemple [C1])

$$H_2^*(X_c) = H_2^*(M \setminus D) \oplus H_2^*(M \setminus D, \partial D).$$

Il nous suffit donc de montrer que $H_2^m(X_c) = 0$. D'après la première partie de la démonstration, on sait déjà que

$$H_2^k(X_c) \simeq \begin{cases} H^k(X_c), & \text{si } k < m, \\ H_c^k(X_c), & \text{si } k > m. \end{cases}$$

X_c est difféomorphe à un produit $\mathbb{R} \times \partial D$, donc ses nombres de Betti $b_k(X_c)$ sont les mêmes que ceux de ∂D. La caractéristique d'Euler L^2 de X_c est par conséquent donnée par

$$\chi_2(X_c) = 2 \sum_{k<m} (-1)^k b_k(\partial D) + (-1)^m \mathrm{dim}(\mathrm{H}_2^{\mathrm{m}}(\mathrm{X_c})),$$

où $b_k(\partial D)$ est le $k-$ème nombre de Betti de ∂D. Or, d'après [B-B1, théorème C], on a :

$$\chi_2(X_c) = \int_{X_c} \omega + 2 \int_{\partial D} P(II) + 2 \sum_{k<m} (-1)^k b_k(\partial D),$$

où ω est la forme d'Euler, et $P(II)$ est un polynôme en la courbure et en la seconde forme fondamentale de ∂D. On en déduit donc que :

$$(-1)^m \mathrm{dim}(\mathrm{H}_2^{\mathrm{m}}(\mathrm{X_c})) = \int_{\mathrm{X_c}} \omega + 2 \int_{\partial \mathrm{D}} \mathrm{P(II)}.$$

Mais le terme de droite de cette égalité tend vers zéro lorsque c tend vers l'infini, donc le terme de gauche, qui est un entier, est nul pour c assez grand ; on obtient bien l'annulation souhaitée. □

Remarques.

i) Pour les variétés hyperboliques de volume fini, on retrouve les résultats de Zucker [Z1], et de Mazzeo et Phillips [M-P] concernant la L^2-cohomologie (ces deux derniers auteurs traitent le cas plus général des variétés hyperboliques géométriquement finies).

ii) Les résultats précédents, et tous ceux qui suivent, restent vrais si on perturbe la métrique sur un compact.

iii) Pour avoir la conclusion seulement pour les degrés inférieurs ou égaux à un $k < (n-1)/2$, il suffit d'avoir $(n-k-1)a - kb > 0$ (voir la proposition 5.1). Mieux encore, il suffit d'imposer ces conditions de pincement uniquement sur les courbures radiales, car ce sont celles qui interviennent dans le théorème de comparaison des hessiens de Greene et Wu.

iv) Les degrés $k = (n \pm 1)/2$ quand $n = 2m+1$ est impair et la courbure variable ne sont pas pris en compte : on verra en effet dans la partie suivante un exemple montrant qu'on ne peut pas espérer de résultats analogues pour ces degrés dès que la courbure varie.

5.2 Etude d'un exemple : le produit doublement tordu

On va maintenant étudier une famille d'exemples qui montre que la conclusion du théorème est fausse, d'une part pour les degrés proches du degré moitié si la dimension est impaire, dès que la courbure varie, et d'autre part pour tous les degrés (autres que 0 et n) si la courbure n'est pas assez pincée. Considérons le tore $\mathbb{T}^i$ de dimension i, notons h_i la métrique induite par celle de $\mathbb{R}^i$. Soient $n \geq 3$ un entier, $1 \leq k < n-1$ un autre entier, et $0 < a < b$ deux réels. On munit la variété $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{T}^{n-k-1} \times \mathbb{T}^k$ de la métrique

$$g = dr^2 + e^{-2ar} h_{n-k-1} + e^{-2br} h_k.$$

Ballmann et Brüning ont considéré cet exemple [B-B1, exemples 3.19, 4.2 et 5.5]. Ils montrent notamment que la courbure sectionnelle K vérifie $-b^2 \leq K \leq -a^2$, et que 0 est dans le spectre essentiel du laplacien Δ_k si et seulement si $(n-k-1)a - kb = 0$.

Nous allons déterminer l'espace des $p-$formes harmoniques sur (Ω, g), en raisonnant comme dans [C4, lemme 5.3] et comme à la fin de la démonstration du théorème 3.1. Tout d'abord, si α est une $p-$forme harmonique vérifiant la condition absolue ou relative sur le bord $\{0\} \times \mathbb{T}^{n-k-1} \times \mathbb{T}^k$, alors d'après le résultat de Hitchin [Hi, théorème 3], α est invariante sous l'action de $\mathbb{T}^{n-k-1} \times \mathbb{T}^k$. Si $x_1, \ldots, x_{n-k-1}, y_1, \ldots, y_k$ est un système de coordonnées sur $\mathbb{T}^{n-1} = \mathbb{T}^{n-k-1} \times \mathbb{T}^k$, on peut écrire

$$\alpha = \sum_{I,J} a_{I,J}(r) dx^I \wedge dy^J + dr \wedge \sum_{I,J} b_{I,J}(r) dx^I \wedge dy^J,$$

où $I = (i_1, \ldots, i_l)$ et $J = (j_1, \ldots, j_m)$ sont des multi-indices, avec $l + m = p$ pour la première somme et $l + m = p - 1$ pour la deuxième, $l \leq n - k - 1$, $m \leq k$, $dx^I \wedge dy^J = dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_l} \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_m}$, et enfin où $a_{I,J}(r)$, $b_{I,J}(r)$ sont des fonctions qui ne dépendent que de r. On peut réécrire cette formule sous la forme :

$$\alpha = \sum_I \beta_I(r) + \sum_I dr \wedge \gamma_I(r),$$

où chaque multi-indice $I = (i_1, \ldots, i_{l_I}, j_1, \ldots, j_{m_I})$ est de longueur $l_I + m_I = p$ (respectivement $l_I + m_I = p - 1$) dans la première somme (respectivement dans la deuxième somme). On a alors :

$$0 = d\alpha = dr \wedge \sum_I \frac{\partial \beta_I}{\partial r},$$

$$0 = \delta\alpha = -\sum_I [\frac{\partial \gamma_I}{\partial r} + (2(l_I a + m_I b) - (n-k-1)a - kb)\gamma_I].$$

Si α vérifie la condition absolue au bord, on a donc forcément

$$\alpha = \sum_I \beta_I,$$

avec les β_I indépendantes de r. Chaque β_I étant de carré intégrable si et seulement si $2(l_I a + m_I b) < (n-k-1)a + kb$, on en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{H}_2^{\mathrm{p}}(\Omega)) &= \sharp\{I = (i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m) / \, l \leq n-k-1, \, m \leq k, \\ & \qquad l + m = p \quad \text{et} \quad 2(la + mb) < (n-k-1)a + kb\}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

et comme par dualité $H_2^p(\Omega, \partial\Omega) \simeq H_2^{n-p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{H}_2^{\mathrm{p}}(\Omega, \partial\Omega)) &= \sharp\{I = (i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m) / \, l \leq n-k-1, \, m \leq k, \\ & \qquad l + m = n - p \quad \text{et} \quad 2(la + mb) < (n-k-1)a + kb\}. \end{aligned}$$

On peut alors voir qu'en dimension impaire $n = 2s+1$, la conclusion du théorème 5.2 concernant les variétés hyperboliques de volume fini n'est plus vérifiée en courbure variable pour les degrés s et $s+1$. Considérons en effet le double produit tordu $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{T}^s \times \mathbb{T}^s$ muni de la métrique $g = dr^2 + e^{-2ar} h_s + e^{-2br} h_s$. L'équation 5.13 qui donne la dimension de $H_2^s(\Omega)$ montre que cette dimension n'est jamais nulle, dès que b est strictement plus grand que a : le multi-indice qui a des 1 pour s premières composantes et des 0 ailleurs est par exemple toujours solution dans ce cas. Ainsi, sur la variété double $\Omega\sharp(-\Omega)$, de dimension $2s+1$, il y a au moins une $s-$forme harmonique en degré s, car $H_2^*(\Omega\sharp(-\Omega)) = H_2^*(\Omega) \oplus H_2^*(\Omega, \partial\Omega)$. Mais l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie est nulle.

Ensuite, nous nous contentons, pour simplifier, de considérer le cas $n = 4$. Le cas général est similaire, et n'apporte rien de plus. Avec les notations précédentes, nous choisissons $k = 1$, et nous pouvons supposer que $b = 1$. L'égalité 5.13 montre que la L^2-cohomologie absolue de degré un $H_2^1(\Omega)$ est de dimension 2 ou 3 selon les valeurs de a : les formes dx_1 et dx_2 sont toujours dans $H_2^1(\Omega)$ et non nulles, alors que dy_1 n'est solution que si $a > 1/2$. Quant à la L^2-cohomologie relative, elle est toujours nulle. Comme la cohomologie usuelle de degré 1 de $\Omega\sharp(-\Omega) = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3$ est de dimension 3, l'isomorphisme $H^1(\Omega\sharp(-\Omega)) \simeq H_2^1(\Omega\sharp(-\Omega))$ n'est vrai que si $a > 1/2$. Remarquons que $a = 1/2$ est exactement la valeur pour laquelle 0 est dans le spectre essentiel de Δ_1. De même, on voit qu'en degré 2, l'isomorphisme entre la L^2-cohomologie et l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie n'est vrai que si $a > 1/2$.

5.3 Cas kählérien

Les exemples précédents montrent que la conclusion du théorème 5.2 n'est plus valable si la courbure n'est pas assez pincée. Cependant, comme il a été montré par Zucker [Z1], les quotients de volume fini de l'espace hyperbolique complexe vérifient la même conclusion que le théorème 5.2, sans pour autant satisfaire les hypothèses de pincement de ce théorème.

Il est donc naturel de se demander si on ne peut pas obtenir des résultats similaires dans le cas kählérien, sans imposer de conditions sur le pincement. Nous allons ici apporter une réponse partielle positive à cette question, en nous servant de la "méthode de la suite exacte" déjà utilisée, et des travaux de Gromov [Gro].

5.3.1 L'hyperbolicité de Gromov

Dans [Gro], Gromov introduit une nouvelle notion d'hyperbolicité. Plus précisément, suivant Gromov, une forme différentielle α sur une variété riemanienne est dite "d(bornée)" s'il existe une forme bornée β telle que $\alpha = d\beta$. On dit que α est $\tilde{d}$(bornée) si son relèvement au revêtement universel est d(bornée). Une variété complexe compacte est alors appelée Kähler hyperbolique si elle admet une métrique kählérienne dont la forme fondamentale est $\tilde{d}$(bornée). Les exemples importants sont les variétés complexes compactes qui admettent une métrique kählérienne à courbure strictement négative. Gromov utilise cette notion pour montrer que sur le revêtement universel d'une variété Kähler hyperbolique, il n'y a pas de formes harmoniques L^2 non nulles en degré différent du degré moitié (il montre aussi, par des arguments supplémentaires, que l'espace des formes harmoniques L^2 en degré moitié est de dimension infinie).

Nous rappelons brièvement la méthode de Gromov. Elle consiste d'abord à utiliser la décomposition de Lefschetz (voir [W], [Gro]). En effet, soit M une variété kählérienne de dimension réelle $n = 2m$, de forme fondamentale ω. Pour un entier j, on considère l'opérateur de Lefschetz L_j : $L^2(\Lambda^{p-2j}T^*M) \to L^2(\Lambda^p T^*M)$ défini par $L_j(\alpha) = \omega^j \wedge \alpha$, où ω^j est la j-ème puissance extérieure de ω. Alors si $p + j = m$, L_j est une bijection quasi-isométrique. Ceci signifie que si $p > m$, et $j := p - m$, alors pour toute forme β dans $L^2(\Lambda^p T^*M)$, il existe une unique forme α dans $L^2(\Lambda^{p-2j}T^*M)$ telle que $\beta = L_j(\alpha)$, et de plus il existe une constante C (indépendante de β) telle que

$$C^{-1}\|\alpha\|_{L^2} \leq \|L_j(\alpha)\|_{L^2} \leq C\|\alpha\|_{L^2}.$$

En fait, l'opérateur de Lefschetz est une quasi-isométrie ponctuelle, c'est-à-dire qu'on a les estimées précédentes en remplaçant les normes globales L^2 par des normes ponctuelles, avec une constante uniforme C. Le théorème de décomposition de Lefschetz, combiné avec l'hyperbolicité kählérienne donne :

Théorème 5.3 (Gromov). *Soit (M^n, ω) une variété complète kählérienne de dimension réelle $n = 2m$. On suppose que la forme fondamentale ω est d(bornée) : il existe une $1-$forme bornée θ telle que $\omega = d\theta$. Alors si $p \neq m$ et si α est une $p-$forme dans le domaine du laplacien, on a l'inégalité*

$$c_n \|\theta\|_{L^\infty}^{-2} \|\alpha\|_{L^2} \leq \|\Delta\alpha\|_{L^2},$$

où $c_n > 0$ est une constante ne dépendant que de n. En particulier, on a $\mathcal{H}^p(M) = 0$ pour $p \neq m$.

Démonstration. Nous reprenons les arguments de [Gro, thérorème 1.4.A]. Pour simplifier la notation, on désigne par c_n toutes les constantes qui ne dépendent que de n. Soit $p > m$ un entier; on pose $j := p - m$. D'après le théorème de Lefshcetz, l'opérateur L_j est une bijection quasi-isométrique des $(p-2j)-$formes dans les p-formes, donc toute $p-$forme α est le produit $\alpha = \omega^j \wedge \beta$, pour une $(p-2j)$-forme β. De plus, on a

$$||\beta||_{L^2} \leq c_n ||\alpha||_{L^2}. \tag{5.14}$$

Comme M est kählérienne, ω est parallèle, donc L_j commute avec Δ. En particulier, on a aussi :

$$\|\Delta\beta\|_{L^2} \leq c_n \|\Delta\alpha\|_{L^2}. \tag{5.15}$$

ω étant fermée, on peut écrire

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega^j \wedge \beta \\ &= d\theta \wedge \omega^{j-1} \wedge \beta \\ &= d(\theta \wedge \omega^{j-1} \wedge \beta) - \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge d\beta. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle \alpha, d(\theta \wedge \omega^{j-1} \wedge \beta) - \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge d\beta \rangle \\ &= \langle \delta\alpha, \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge \beta \rangle - \langle \beta, \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge d\beta \rangle. \end{aligned}$$

En se servant de l'estimation $\|\delta\alpha\|_{L^2} \leq \langle \Delta\alpha, \alpha \rangle^{1/2} \leq \|\Delta\alpha\|_{L^2}^{1/2} \|\alpha\|_{L^2}^{1/2}$ et de l'inégalité 5.14, le premier terme du membre de droite de l'équation précédente peut être estimé par

$$\begin{aligned} |\langle \delta\alpha, \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge \beta \rangle| &\leq c_n ||\theta||_{L^\infty} ||\beta||_{L^2} ||\delta\alpha||_{L^2} \\ &\leq c_n ||\theta||_{L^\infty} ||\alpha||_{L^2}^{3/2} \|\Delta\alpha\|_{L^2}^{1/2} \end{aligned}$$

Quant au deuxième terme, d'après l'inégalité 5.15, et en utilisant $||d\beta||_{L^2} \leq c_n \|\Delta\alpha\|_{L^2}^{1/2} \|\alpha\|_{L^2}^{1/2}$, on a

$$|\langle \alpha, \theta \wedge \omega^{j-1} \wedge d\beta \rangle| \leq c_n ||\theta||_{L^\infty} ||\alpha||_{L^2}^{3/2} \|\Delta\alpha\|_{L^2}^{1/2}.$$

On en déduit l'estimation suivante :

$$||\alpha||_{L^2} \leq c_n ||\theta||_{L^\infty}^2 \|\Delta\alpha\|_{L^2}$$

valable pour les $p-$formes dans le domaine de Δ, avec $p > m$. Le cas $p < m$ s'en déduit par dualité. $\square$

Remarque. La preuve de ce théorème montre que si on suppose $\omega = d\theta$ seulement en dehors d'un compact, alors on a une inégalité de Poincaré à l'infini pour les degrés $p \neq m$.

On revient maintenant à une variété (M, g) complète, kählérienne, de volume fini et à courbure négative et pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Sur une telle variété, la forme fondamentale ω ne peut pas être d(bornée). En effet, sur une variété kählérienne, la forme fondamentale ω a une norme constante et elle est harmonique (car parallèle). Comme le volume est fini, ω est donc une forme harmonique L^2 non triviale. Mais en raison de la décomposition de Hodge-de Rham, ω ne peut pas être la différentielle d'une forme bornée (donc L^2). Cependant, nous avons le lemme suivant, qui est certainement bien connu :

Lemme 5.4. *Soit (M, g) une variété complète kählérienne de volume fini, à courbure négative et pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Alors en dehors d'un compact, sa forme fondamentale est d(bornée). Plus précisément, il existe un compact L de une $1-$forme continue et bornée θ tels que sur $M \setminus L$, on ait $\omega = d\theta$ au sens faible.*

Démonstration. On se place sur un bout, et on considère une fonction de Busemann associé r telle que le bout soit difféomorphe à $[0, \infty[\times\Sigma$ (Σ une variété close). Soit φ_t le flot du gradient de la fonction de Busemann. Si $x = (s, \sigma)$ est un point de $[0, \infty[\times\Sigma$, on a tout simplement

$$\varphi_t(s, \sigma) = (s + t, \sigma).$$

En particulier, le flot est au moins de classe C^2 car son expression est C^∞ dans une carte de classe C^2 (on rappelle que le difféomorphisme du bout sur $[0, \infty[\times\Sigma$ est seulement de classe C^2 a priori). Etudions un peu la différentielle de ce flot. D'abord, on a $d_x\varphi_t(\nabla r(x)) = \nabla r(\varphi_t(x))$. Soit X un vecteur tangent au point x, de norme 1 et orthogonal à ∇r. Alors $t \to d_x\varphi_t(X)$ est un champ de Jacobi stable le long de la géodésique $t \to (s+t, \sigma)$, orthogonal au vecteur vitesse ∇r, et vaut X en $t = 0$. Ainsi, les estimées classiques sur les champs de Jacobi (voir [He-I]) montrent, compte tenu de l'hypothèse de courbure $K \leq -a^2$, qu'on a

$$|d_x\varphi_t(X)| \leq e^{-at}.$$

Comme ω est fermée, d'après la formule de Cartan, on a

$$\varphi_t^*\omega - \omega = d\int_0^t \varphi_s^*(i_{\nabla r}\omega)\, ds.$$

L'estimée sur la différentielle de φ_t montre alors, en passant à la limite quand t tend vers l'infini, que $\omega = d\theta$ sur le bout, avec

$$\theta = -\int_0^\infty \varphi_s^*(i_{\nabla r}\omega)\, ds.$$

Cette même estimée montre que θ est bornée. □

Borel et Casselman [Bo-C] ont étudié le spectre essentiel des quotients de volume fini de l'espace hyperbolique complexe. De ce qui précède, nous pouvons déduire une généralisation de leur résultat :

Corollaire 5.5. *Soit (M,g) une variété complète kählérienne de volume fini, à courbure négative et pincée. Alors zéro n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien agissant sur les formes différentielles L^2.*

Démonstration. En utilisant le lemme 5.4, on peut, en raisonnant comme dans le théorème de Gromov, trouver une inégalité de Poincaré à l'infini pour les formes de degré $p \neq m$ ($n = 2m$ étant la dimension réelle de M), et donc zéro n'est pas dans le spectre essentiel pour ces degrés. De plus, un argument classique permet d'en déduire aussi l'existence d'un trou spectral en degré m (voir par exemple la preuve du corollaire 3.2). Mais selon [L3], l'espace des $m-$formes harmoniques de notre variété est de dimension finie, ce qui permet d'avoir aussi la conclusion pour le degré m. $\square$

5.3.2 Calcul de la L^2-cohomologie

Théorème 5.6. *Soit (M,g) une variété complète kählérienne de volume fini, à courbure négative et pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$, de dimension réelle $n = 2m$. Alors on a les isomorphismes*

$$H_2^k(M) \simeq \begin{cases} H^k(M), & \text{si } k < m-1, \\ H_c^k(M), & \text{si } k > m+1. \end{cases}$$

De plus, $H^{m-1}(M)$ s'injecte dans $H_2^{m-1}(M)$ et $H_c^{m+1}(M)$ se surjecte dans $H_2^{m+1}(M)$.

Démonstration. Par dualité, il suffit de montrer le résultat pour les degrés $k > m+1$, et on va le faire de manière analogue à la preuve du théorème 3.1 concernant la L^2-cohomologie des variétés hyperboliques réelles. En effet, d'après le corollaire 5.5, 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien. Donc pour tout k, et tout ouvert borné D, on a la première suite exacte du corollaire 2.8

$$H_2^{k-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^k(D) \xrightarrow{e} H_2^k(M) \xrightarrow{r} H_2^k(M \setminus D).$$

Il suffit donc de montrer que pour $j \geq m+1$, on a $H_2^j(M \setminus D) = 0$ si D est bien choisi. Pour simplifier, et sans perdre de généralités, on va supposer que M a un seul bout, et on appelle r une fonction de Busemann associée à ce bout telle qu'en dehors de l'ouvert borné $D_0 = \{r < 0\}$, on ait $M \setminus D_0 \simeq [0,\infty[\times\Sigma$, avec Σ une variété compacte sans bord. D'après le lemme 5.4, on peut supposer que sur $M \setminus D_0$, la forme fondamentale ω associée à g vérifie $\omega = d\theta$, où θ est bornée par rapport à g.

La première étape est de montrer l'existence d'une métrique $\tilde{g}$ kählérienne complète sur $M \setminus D_0$ (envoyant le bord à l'infini), dont la forme fondamentale est d(bornée), et qui coïncide avec la métrique initiale g quand r est grand. Pour cela, remarquons d'abord que d'après [G-W] et [S-Y], $-r$ est strictement plurisousharmonique sur le bout, c'est-à-dire que sa forme de Levi $-\partial\overline{\partial}r$ est définie positive (on a même plus précisément $a\omega \leq -\partial\overline{\partial}r \leq b\omega$ sur le bout). On rappelle que r n'est *a priori* que de classe C^2, mais nous supposerons, dans un premier temps, que r est de classe C^∞. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que

$$f(t) = -\log(t) \text{ sur }]0,1] \text{ et } f'(t) = 0 \text{ sur } [2, \infty[,$$

$$f' \leq 0 \text{ et } f'' \geq 0.$$

On définit la fonction $F : M \setminus D_0 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = f(r(x)).$$

On a

$$\partial\overline{\partial}F = f'(r)\partial\overline{\partial}r + f''(r)\partial r \wedge \overline{\partial}r,$$

donc les hypothèses sur f entraînent que $\partial\overline{\partial}F$ est positive sur $M \setminus D_0$. Comme $f(t) = -\log(t)$ si $t \leq 1$, sur la partie $\{0 < r \leq 1\}$ on a même

$$\partial\overline{\partial}F = -\partial\overline{\partial}(\log(r)) = -\frac{\partial\overline{\partial}r}{r} + \frac{\partial r \wedge \overline{\partial}r}{r^2}, \tag{5.16}$$

donc $\partial\overline{\partial}F$ est définie positive et complète sur $\{0 < r \leq 1\}$. On considère alors la métrique kählérienne complète $\tilde{g}$ définie sur $M \setminus D_0$, dont la forme fondamentale est donnée par

$$\tilde{\omega} = i\partial\overline{\partial}F + \omega = d(-i\partial F + \theta).$$

f étant constante sur $[2, \infty[$, on a $\partial\overline{\partial}F = 0$ sur $\{r > 2\}$, et g et $\tilde{g}$ sont égales sur cette partie. Il reste à voir que $\tilde{\omega}$ est d(bornée), en montrant que la $1-$forme $-i\partial F + \theta$ est bornée par rapport à $\tilde{g}$. Sur la partie $\{r > 2\}$, c'est clair car $\tilde{\omega} = \omega$. On se place sur la partie $\{0 < r \leq 1\}$, où $\tilde{g}$ est quasi-isométrique à $\partial\overline{\partial}F$. Comme $-\partial\overline{\partial}r$ est positive, d'après l'équation 5.16, on a

$$|\partial F|_{\partial\overline{\partial}F} = |\frac{\partial r}{r}|_{\partial\overline{\partial}F} \leq 1.$$

Mais la norme de θ par rapport à $\partial\overline{\partial}F$ tend vers zéro quand r est proche de zéro, si bien que $-i\partial F + \theta$ est bornée par rapport à $\partial\overline{\partial}F$, donc aussi par rapport à $\tilde{g}$. Nous avons ainsi construit une métrique $\tilde{g}$ complète kählérienne sur $M \setminus D_0$, dont la forme fondamentale est d(bornée), et qui est égale à la métrique initiale g sur $\{r > 2\}$. Le théorème 5.3 entraîne en particulier l'annulation de la L^2-cohomologie de $(M \setminus D_0, \tilde{g})$ pour les degrés $j \neq m$:

$$H_2^j(M \setminus D_0, \tilde{g}) = 0.$$

Nous avons pour cela supposé que la fonction de Busemann r est lisse, mais ceci n'est pas une restriction : en effet, r n'intervient dans la construction de $\tilde{g}$ que par ses valeurs sur le compact $\{0 \leq r \leq 2\}$, et on peut approximer r sur ce compact par une fonction lisse.

Soit $D_1 = \{r < 1\}$. On veut montrer que pour $j > m$, on a $H_2^j(M \setminus D_1, g) = 0$. Soit $[\alpha]$ une classe dans $H_2^j(M \setminus D_1, g)$, de représentant la forme lisse α. Près du bord $\{1\} \times \Sigma$ de $M \setminus D_1$, on écrit $\alpha = \beta(r) + dr \wedge \gamma(r)$, où β et γ sont vues comme des formes sur Σ, dépendant du paramètre r. Comme dans le point 2. de la preuve du théorème 3.1, on peut supposer, quitte à retirer une forme exacte à α, que $\gamma = 0$ et $\beta(r) = \beta(1)$ ne dépend pas de r. On prolonge alors α en une forme $\tilde{\alpha}$ définie sur tout $M \setminus D_0$ en posant $\tilde{\alpha}(r) = \alpha(1)$ si $r \leq 1$. Ce prolongement reste fermé.

Affirmation. *$\tilde{\alpha}$ est de carré intégrable sur $(M \setminus D_0, \tilde{g})$.*

Supposons pour l'instant l'affirmation vraie. Alors $\tilde{\alpha}$ est une forme fermée L^2 sur $(M \setminus D_0, \tilde{g})$, de degré $j > m$. Comme $H_2^j(M \setminus D_0, \tilde{g}) = 0$, il existe une forme φ L^2 sur $(M \setminus D_0, \tilde{g})$ telle que $\tilde{\alpha} = d\varphi$. On a donc $\alpha = d(\varphi|_{M \setminus D_1})$, avec $\varphi|_{M \setminus D_1}$ de carré intégrable sur $(M \setminus D_1, g)$, donc la classe $[\alpha]$ est nulle, ce qui prouve finalement bien que $H_2^j(M \setminus D_1, g) = 0$ pour $j > m$. Et on en déduit la conclusion du théorème.

Il reste donc à prouver l'affirmation, en montrant que $\tilde{\alpha}$ est intégrable proche de $r = 0$ par rapport à la métrique $-i\partial\overline{\partial}\log(r)$ (qui est quasi-isométrique à $\tilde{g}$). Pour $t \geq 0$, la restriction du fibré tangent TM à l'ensemble $\{r = t\}$ sera noté par $TM|_{\{r=t\}}$. Comme $\{r \geq 0\}$ est difféomorphe à un produit $[0, \infty[\times \Sigma$, on a $TM|_{\{r=t\}} = \mathbb{R}\partial/\partial r \oplus T\Sigma$. J désignera la structure complexe, et J_t la restriction de J au fibré $TM|_{\{r=t\}}$. Soient $e_1 = \partial/\partial r$ et $e_2 = J_0\partial/\partial r$. On complète (e_1, e_2) en un repère local $g-$orthonormé $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{2m}$ de $TM|_{\{r=0\}}$: nous entendons par là que les e_p sont des sections locales $g-$orthonormées de $TM|_{\{r=0\}}$. On notera que les $e_p, p \geq 2$ sont dans le noyau de dr et forment donc un repère local de $T\Sigma$, c'est-à-dire des sections locales qui en tout point forment une base. On pourra ainsi considérer que pour tout $t \geq 0$, les e_p forment un repère local de $TM|_{\{r=t\}} = \mathbb{R}\partial/\partial r \oplus T\Sigma$ (qui ne sera plus $g-$orthonormé en général). On va étudier $-i\partial\overline{\partial}\log(r)$ à l'aide des e_p. Pour $t > 0$, on a

$$-i\partial\overline{\partial}\log(r)(e_p, J_t e_q) = -i\frac{\partial\overline{\partial}r(e_p, J_t e_q)}{t} + i\frac{\partial r \wedge \overline{\partial}r(e_p, J_t e_q)}{t^2}.$$

On a

$$2\partial r(e_1) = dr(\partial/\partial r) - idr(J_t\partial/\partial r) = 1,$$

$$2\partial r(J_t e_1) = dr(J_t\partial/\partial r) + idr(\partial/\partial r) = i.$$

Donc

$$-i\partial\overline{\partial}\log(r)(te_1, tJ_t e_1) = -it^{-1}\partial\overline{\partial}r(te_1, tJ_t e_1) + 1/2 = 1/2 + O(t).$$

Comme $J_t J_0 \partial/\partial r = -\partial/\partial r + O(t)$, on a aussi

$$2\partial r(e_2) = dr(J_0\partial/\partial r) - idr(J_t J_0 \partial/\partial r) = i + O(t),$$

$$2\partial r(J_t e_2) = dr(J_t J_0 \partial/\partial r) + idr(J_0\partial/\partial r) = -1 + O(t).$$

Et enfin pour $p \geq 3$, on a $dr(e_p) = 0$ et $dr(J_t e_p) = O(t)$, d'où

$$\partial r(e_p) = \partial r(J_t e_p) = O(t).$$

Par conséquent, dans le repère local $te_1, te_2, \sqrt{t}e_3, \ldots, \sqrt{t}e_{2m}$ $(t > 0)$ de $TM|_{\{r=t\}}$, la matrice de $-i\partial\overline{\partial}\log(r)(., J.)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1/2 + O(t) & O(t) \\ O(t) & 1/2 + O(t) \end{matrix} & O(\sqrt{t}) \\ O(\sqrt{t}) & -i\partial\overline{\partial}r(e_p, J_t e_q) + O(t) \end{pmatrix}.$$

Donc si on note par h_0 la matrice $(-i\partial\overline{\partial}r(e_p, J_r e_q))|_{r=0}, p, q \geq 3$, la métrique associée à $-i\partial\overline{\partial}\log(r)$ est comparable à la métrique dont la restriction à $TM|\{r = t\}$ dans le repère $te_1, te_2, \sqrt{t}e_3, \ldots, \sqrt{t}e_{2m}$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & h_0 \end{pmatrix}.$$

La métrique associée à $-i\partial\overline{\partial}\log(r)$ est donc finalement comparable à la métrique dont la matrice dans le repère $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{2m}$ est

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1/t^2 & 0 \\ 0 & 1/t^2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & h_0/t \end{pmatrix}.$$

La forme volume de $-i\partial\overline{\partial}\log(r)$ se comporte ainsi comme $t^{-(m+1)}$ lorsque t est proche de zéro. Rappelons que la $j-$forme $\tilde{\alpha}$ est indépendante de t et ne contient pas de composante suivant dr, donc sa norme ponctuelle $|\tilde{\alpha}|^2$ est en $O(t^j)$. Comme $j > m$, $\tilde{\alpha}$ est de carré intégrable vers $t = 0$. $\square$

6 Quelques mots sur la L^p-cohomologie

Dans cette partie, nous allons considérer plus généralement la L^p-cohomologie, pour $1 \leq p < \infty$. La motivation est naturellement de comprendre ce qui se passe pour $p \neq 2$, une fois qu'on a compris le cas $p = 2$. Il existe déjà de nombreux travaux dans ce domaine, voir par exemple ceux de Gol'dshtein, Kuzminov, Shvedov [G-K-S], Youssin [Y], ou encore Zucker [Z2], et les références qui s'y trouvent. Dans [P], P. Pansu a aussi utilisé la cohomologie L^p pour étudier un problème de pincement optimal de la courbure pour certains espaces homogènes. Ce papier très intéressant contient par ailleurs de nombreux exemples de calculs d'espaces de L^p-cohomologie.

6.1 La L^p-cohomologie

Soient (M, g) une variété riemannienne, et $p \geq 1$ un réel. On note $L^p(\Lambda^* T^* M)$ (ou plus simplement L^p) l'ensemble des formes différentielles dont la norme à la puissance p est intégrable. Comme pour le cas $p = 2$, on peut aussi considérer l'espace $\Omega_p^*(M)$ constitué des formes qui sont, ainsi que leur dérivée extérieure, dans L^p.

Définition 6.1. *Le $k-$ème espace de L^p-cohomologie* **non réduite** *de (M, g) est*

$$H_p^k(M) = \{\alpha \in \Omega_p^k(M) / d\alpha = 0\} / d\Omega_p^{k-1}(M).$$

En particulier pour $p = 2$, la notation $H_2^k(M)$ désignera donc ici la L^2-cohomologie non réduite, contrairement aux paragraphes précédents. J'espère qu'il n'y aura pas de confusions. Mais pourquoi considérer maintenant la L^p-cohomologie non réduite, alors que jusque là nous avions plutôt travaillé avec la L^2-cohomologie réduite ? D'abord, pour $p = 2$, c'était plus pratique, en vue de la décomposition de Hodge-de Rham-Kodaira ; mais une telle décomposition n'existe pas pour p quelconque. Ensuite, toujours dans le cas $p = 2$, pratiquement tous nos résultats ont été obtenus dans le cadre où 0 n'est pas dans le spectre essentiel du laplacien, et L^2-cohomologie réduite et non réduite coïncident. De même, nous verrons que nos résultats concernant le cas p quelconque seront valables dans des situations où L^p-cohomologie réduite et non réduite sont égales. Nous utiliserons pour cela le fait bien connu que si la L^p-cohomologie non réduite est de dimension finie, alors elle est égale à la L^p-cohomologie réduite. Si par exemple M est compacte (avec éventuellement un bord), alors l'image de d est fermée et il y a un isomorphisme entre la L^p-cohomologie et la cohomologie (absolue) de M.

Nous terminons cette partie en énonçant un résultat qui nous sera utile (voir le lemme 10 de [G-K-S], ainsi que le corollaire qui le suit) :

Proposition 6.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne, et D un ouvert borné à bord régulier de M. Alors la suite*

$$H_p^{k-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^k(D) \xrightarrow{e} H_p^k(M) \xrightarrow{r} H_p^k(M \setminus D)$$

est exacte, où b est l'homomorphisme cobord, e est l'extension par zéro, et r la restriction.

6.2 Calculs pour les variétés de volume fini, à courbure négative et pincée

Dans cette partie, (M, g) sera une variété complète de volume fini, de dimension n, à courbure sectionnelle négative et pincée

$$-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0.$$

Notre but est de donner une interprétation topologique de la L^p-cohomologie de M, mais nos résultats seront beaucoup plus incomplets que pour le cas $p = 2$. La méthode est inspirée de celle utilisée par P. Pansu [P].

Revenant à notre variété M, on rappelle que celle-ci a un nombre fini de bouts. On pourra supposer, sans perdre de généralités, que M a un seul bout, et on choisit une fonction de Busemann r associée à ce bout, de sorte qu'en dehors de l'ouvert borné $D := \{r < 0\}$, on ait $M \setminus D \simeq [0, \infty[\times \partial D$. Soit ∇r le gradient de r, de flot φ_t. Sur $M \setminus D$, le flot φ_t est juste la translation de longueur t sur le facteur $]0, \infty[$, c'est-à-dire que si $x = (r_0, \theta_0)$ est un point de $M \setminus D$, alors on a simplement

$$\varphi_t(r_0, \theta_0) = (r_0 + t, \theta_0).$$

Suivant [P], on introduit maintenant l'opérateur B agissant sur une forme différentielle α par la formule

$$B\alpha = \int_0^\infty \varphi_t^*(i_{\nabla r}\alpha)\, dt. \tag{6.17}$$

Nous voulons montrer que pour les bons degrés k, et avec un bon pincement, l'application d'extension par zéro $H_c^k(D) \overset{e}{\to} H_p^k(M)$ est un isomorphisme. Nous avons tout d'abord besoin de deux lemmes, qui sont l'analogue des propositions 8 et 10 de [P].

Lemme 6.3. *On garde les hypothèses et notations précédentes. On note $Jac(\varphi_t)$ le jacobien de φ_t. Pour un entier j, on pose*

$$\eta := (j-1)(p-1)a - (n-j)b.$$

Alors pour toute $j-$forme α définie sur $M \setminus D$, on a

$$|\varphi_t^*(i_{\nabla r}\alpha))|^p(x) \leq e^{-\eta t}|\alpha|^p(\varphi_t(x))Jac(\varphi_t)(x).$$

En particulier, si $\eta > 0$, l'opérateur B est bien défini et continu sur $L^p(\Lambda^j T^*(M \setminus D))$.

Nous ne refaisons pas la démonstration. Celle de [P, proposition 8] s'adapte mot pour mot à notre cadre : il s'agit en gros d'estimer la dérivée par rapport à t de $p \log(|\varphi_t^*(i_{\nabla r}\alpha))|(x)/|\alpha|(\varphi_t(x))) - \log(Jac(\varphi_t)(x))$, ce qui fait intervenir les courbures principales des niveaux $\{t\} \times \partial D$ de notre fonction de Busemann. La seule différence, c'est que ces courbures principales sont comprises entre $-b$ et $-a$, et non entre a et b comme c'est le cas pour les variétés simplement connexes à courbure négative $-b^2 \leq K \leq -a^2$ considérées dans [P, proposition 8].

Lemme 6.4. *Soit α une $j-$forme qui est dans $\Omega_p^j(M \setminus D)$. On suppose que $(j-1)(p-1)a - (n-j)b > 0$. Alors on a la formule d'homotopie*

$$dB\alpha + Bd\alpha = -\alpha.$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps que la forme α est lisse et à support borné dans $M \setminus D$. D'après la formule de Cartan, on a

$$\begin{aligned} d\varphi_t^* i_{\nabla r}\alpha + \varphi_t^* i_{\nabla r} d\alpha &= \varphi_t^*(di_{\nabla r}\alpha + i_{\nabla r}d\alpha) \\ &= \varphi_t^* L_{\nabla r}\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\alpha), \end{aligned}$$

où $L_{\nabla r}$ est la dérivation de Lie dans la direction du champ de vecteurs ∇r. On en déduit que

$$\begin{aligned} dB\alpha + Bd\alpha &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\alpha)\, dt \\ &= \lim_{t\to\infty} \varphi_t^*\alpha - \alpha. \end{aligned}$$

Or, d'après les propriétés du flot φ_t, on a $\lim_{t\to\infty}\varphi_t^*\alpha = 0$ car α est à support compact, donc l'identité d'homotopie est vraie pour les formes lisses à support compact. Mais l'hypothèse sur les nombres a, b, p et j montre, grâce au lemme précédent (lemme 6.3), que l'opérateur B est continu sur les j et $(j+1)$-formes qui sont de classe L^p sur $M \setminus D$, donc par densité de $C_b^\infty(\Lambda^j T^*(M\setminus D))$ dans $\Omega_p^j(M\setminus D)$, la formule s'étend à tout $\Omega_p^j(M\setminus D)$. □

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat :

Théorème 6.5. *Soit M une variété complète de dimension n, de volume fini, à courbure négative et pincée $-b^2 \leq K \leq -a^2 < 0$. Soient $p \geq 1$ un réel, et k un entier. On suppose que $(k-2)(p-1)a-(n-k+1)b > 0$. Alors on a l'isomorphisme $H_p^k(M) \simeq H_c^k(M)$.*

Démonstration. D'après la proposition 6.2, la suite

$$H_p^{k-1}(M \setminus D) \xrightarrow{b} H_c^k(D) \xrightarrow{e} H_p^k(M) \xrightarrow{r} H_p^k(M \setminus D)$$

est exacte. Il suffit donc de montrer que les espaces de L^p-cohomologie à l'infini sont nuls en degrés $k-1$ et k. Soit donc $[\alpha]$ un élément de $H_p^j(M \setminus D, \partial D)$, avec $j = k-1$ ou k, et $\alpha \in \Omega_p^j(M \setminus D)$ un représentant de cette classe. L'hypothèse $(k-2)(p-1)a-(n-k+1)b > 0$ implique que la condition de pincement du lemme 6.4 est également satisfaite pour $j = k-1, k$, donc, compte tenu du fait que α est fermée, on a

$$\alpha = d(-B\alpha).$$

Comme α est dans $\Omega_p^j(M\setminus D)$, il en est de même pour $B\alpha$, d'après le lemme 6.3, et donc α est nulle en cohomologie L^p. □

Remarque. Si on suppose que $(k-1)(p-1)a-(n-k)b > 0$, alors la preuve précédente s'applique encore et montre l'annulation de la L^p-cohomologie à l'infini en degré k, ce qui prouve, via la suite exacte, que la cohomologie à support compact se surjecte dans la L^p-cohomologie de M en degré k. La L^p-cohomologie est donc de dimension finie, et en particulier forcément égale à la L^p-cohomologie réduite. On en déduit

Corollaire 6.6. *Avec les notations du théorème précédent, si on suppose que* $(k-1)(p-1)a-(n-k)b>0$*, alors l'image de* $d: \Omega_p^{k-1}(M) \to L^p(\Lambda^k T^*M)$ *est fermée.*

Il est fort probable que sous cette hypothèse $(k-1)(p-1)a-(n-k)b>0$, qui est moins restrictive que celle du théorème 6.5, on a encore un isomorphisme entre la L^p-cohomologie non réduite et la cohomologie à support compact, en degré k (c'est vrai pour $p=2$, d'après la proposition 5.1).

Par dualité, on peut tirer un autre corollaire du théorème 6.5. En effet, pour un réel donné p, notons par q son exposant conjugué, i.e. $1/p+1/q=1$. Si on suppose que M est orientable, alors la forme bilinéaire définie de $H_p^k \times H_q^{n-k}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$([\alpha],[\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

existe (ne dépend pas des représentants choisis) et elle est non dégénérée si $p>1$ (voir par exemple [P, lemme 81]). On a donc

Corollaire 6.7. *Si* M *est une variété complète, orientable, de volume fini et à courbure négative pincée, alors pour* $p>1$*, et* k *vérifiant* $(k-2)(p-1)a-(n-k+1)b>0$*, on a un isomorphisme* $H_q^{n-k}(M) \simeq H^{n-k}(M)$*.*

6.3 Variétés conformément compactes

La méthode de preuve du théorème 6.5 est très proche de la méthode de calcul de la L^2-cohomologie exposée dans la troisième partie. Ceci n'est pas très étonnant : dans les deux cas, on doit montrer l'annulation de la L^2-cohomologie (respectivement L^p-cohomologie) à l'infini. Pour $p=2$, nous l'avons fait grâce à l'identité de Donnelly et Xavier (théorème 2.10), et pour p quelconque, grâce au lemme d'homotopie 6.4. Or l'identité de Donnelly et Xavier est une forme intégrée de la formule de Cartan, et cette formule est aussi à la base de la démonstration du lemme d'homotopie. Il est donc naturel que pour la plupart des géométries considérées dans la partie 3, on puisse aussi calculer certains espaces de cohomologie L^p. Nous avons par exemple le résultat suivant sur les variétés conformément compactes (dont on notera qu'il découle aussi de [G-K-S], voir la remarque après la preuve) :

Théorème 6.8. *Soit* $(\overline{M}^n, g)$ *une variété conformément compacte de dimension* n*. Soient* $p \geq 1$ *un réel, et* k *un entier. Si* $n-1-kp>0$*, alors on a l'isomorphisme* $H_p^k(M) \simeq H_c^k(M)$

Démonstration. En dehors d'un compact D, M est quasi-isomérique à un produit tordu $([0,\infty[\times \partial M, dr^2+e^{2r}h)$, avec h une métrique sur ∂M, indépendante de r (voir par exemple la preuve du corollaire 3.10). Or, la L^p-cohomologie est par définition invariante par quasi-isométries, donc il suffit de montrer le théorème pour cette structure de produit tordu à l'infini. On procède comme dans la démonstration du thèorème 6.5. On définit donc l'opérateur B par la formule 6.17. Les courbures principales des niveaux $\{t\} \times \partial M$ de la fonction r sont toutes égales à 1, donc le raisonnement de [P, proposition 8] montre que pour toute $k-$forme α définie sur $M \setminus D$, on a

$$|\varphi_t^*(i_{\nabla r}\alpha))|^p(x) \leq e^{-(n-1-(k-1)p)t}|\alpha|^p(\varphi_t(x))Jac(\varphi_t)(x).$$

Ainsi, si $n-1-(k-1)p > 0$, alors B est continu sur $L^p(\Lambda^k T^*(M \setminus D))$. Maintenant, si $n-1-kp > 0$, B est continu sur les k et $(k+1)-$formes, donc on a la formule d'homotopie du lemme 6.4 pour les éléments de $\Omega_p^k(M \setminus D)$ (et donc aussi sur les éléments de $\Omega_p^{k-1}(M \setminus D)$). On en déduit une annulation de la L^p-cohomologie à l'infini en degrés $k-1$ et k, puis on conclut grâce à la suite exacte de la proposition 6.2. $\square$

Remarque. Ce théorème est aussi une conséquence des travaux de Gol'dshtein, Kuz'minov et Shvedov [G-K-S] : ces auteurs obtiennent des critères d'annulation de la L^p-cohomologie à l'infini pour les produits tordus, et on peut ensuite utiliser la suite exacte.

A Annexe : quelques compléments sur les travaux d'Ohsawa

Soit (M, g) une variété riemannienne complète, et E un fibré vectoriel au-dessus de M, muni d'une métrique hermitienne h. Soit ∇ une connexion orthogonale sur E, c'est-à-dire que pour tout champ de vecteurs X et toutes sections α et β de E, on a

$$X.\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \nabla_X \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \nabla_X \beta \rangle.$$

Enfin, soit R un endomorphisme symétrique agissant sur les sections de E. On peut alors considérer l'opérateur de type Schrödinger suivant (la notation Δ est un abus) :

$$\Delta = \nabla^* \nabla + R.$$

Par exemple, le laplacien agissant sur les k-formes différentielles est un opérateur de ce type, où R_0 est l'endomorphisme bâti à l'aide de la métrique g, qui intervient dans la formule de Bochner. Pour $k = 1$, R est dans ce cas la courbure de Ricci.

Revenant au cas général, nous ferons les hypothèses suivantes, avec des notations évidentes :

(1) Il existe une suite de métriques complètes g_p sur M (respectivement une suite de métriques hermitiennes h_p sur E), qui convergent, ainsi que leurs dérivées, uniformément sur les compact de M vers g (respectivement vers h).

(2) Il existe une suite d'endomorphismes R_p de E, symétriques pour la métrique h_p, et une suite ∇_p de connexions orthogonales pour h_p, qui convergent uniformément sur les compacts vers R et ∇ respectivement.

(3) (inégalités de Poincaré à l'infini uniformes) Il existe un compact K de M, et une constante $\lambda_0 > 0$, tels que pour tout p, on ait

$$\forall \alpha \in C_0^\infty(M \setminus K, E),\ \lambda_0 ||\alpha||_p^2 \leq \langle \Delta_p \alpha, \alpha \rangle_p.$$

La question est de savoir si les valeurs propres de Δ_p convergent vers celles de Δ. Dans [Co-C], B. Colbois et G. Courtois étudient un tel problème pour le laplacien de Hodge-de Rham, dans un contexte plus général que celui présenté ici. Nous allons montrer :

Théorème 1. *On suppose que les hypothèses (1)-(2)-(3) sont satisfaites.*

1. *On suppose qu'il existe une suite de valeurs propres λ_p pour Δ_p, telle que les λ_p convergent vers un réel $\lambda < \lambda_0$. Alors λ est une valeur propre pour Δ. De plus, si pour tout p, α_p est une section propre de norme* 1 *(pour les métriques g_p et h_p) associée à la valeur propre λ_p, alors les α_p convergent dans $H^1_{loc}(M, E)$ vers une section propre L^2 non nulle de Δ, associée à λ.*
2. *Réciproquement, si λ est une valeur propre pour Δ, avec $|\lambda| < \lambda_0$, alors il existe une suite p_m d'entiers tendant vers l'infini, et des valeurs propres λ_{p_m} pour Δ_{p_m} qui convergent vers λ.*

Démonstration. Nous montrons d'abord le premier point. Nous débutons par l'égalité suivante, valable pour toute fonction ρ lisse, valant 1 en dehors d'un compact, et toute section α dans l'espace de Sobolev $H^2(M, E)$ (domaine de Δ)

$$\int_M \left[\rho^2 \langle \Delta\alpha, \alpha\rangle + |d\rho|^2 |\alpha|^2\right] dv_g = \int_M \langle \Delta(\rho\alpha), \rho\alpha\rangle\, dv_g. \qquad (*)$$

En effet, on a d'un côté

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \nabla^*\nabla(\rho\alpha), \rho\alpha\rangle &= \int_M |\nabla(\rho\alpha)|^2 \\
&= \int_M |\rho\nabla\alpha + d\rho \otimes \alpha|^2 \\
&= \int_M \rho^2|\nabla\alpha|^2 + \int_M |d\rho|^2|\alpha|^2 + \int_M 2\rho\langle\nabla\alpha, d\rho\otimes\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

et de l'autre côté

$$\begin{aligned}
\int_M \rho^2 \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle &= \int_M \langle \nabla\alpha, \nabla(\rho^2\alpha)\rangle, \\
&= \int_M \rho^2|\nabla\alpha|^2 + \int_M 2\rho\langle\nabla\alpha, d\rho\otimes\alpha\rangle,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément la formule (*). Remarquons que cette formule est aussi valable si on remplace g, h, ∇ et Δ par respectivement g_p, h_p, ∇_p et Δ_p.

Soit maintenant α_p une section propre de norme 1, associée à la valeur propre λ_p de Δ_p :

$$\Delta_p \alpha_p = \lambda_p \alpha_p \ \text{ et } \int_M |\alpha_p|_p^2 dv_{g_p} = 1.$$

On a

$$\|\Delta_p \alpha_p\|_p = |\lambda_p| \|\alpha_p\|_p \leq \sup_j (|\lambda_j|) < \infty,$$

donc la suite α_p est bornée dans $H^2_{loc}(M, E)$. D'après le théorème de Rellich et les estimées classiques d'ellipticité, on peut supposer que les α_p convergent dans $H^1_{loc}(M, E)$, à une sous-suite près notée encore α_p, vers un élément α. Comme α_p est de norme 1 par rapport aux métriques g_p et h_p, le lemme de Fatou entraîne, grâce à l'hypothèse (1), que α est de carré intégrable par rapport aux métriques g et h. De plus, α doit vérifier $\Delta\alpha = \lambda\alpha$. En effet, si φ est une section lisse à support compact, en utilisant (1) et (2), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \Delta\varphi \rangle_{L^2} &= \lim_{p\to\infty} \langle \alpha_p, \Delta\varphi \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{p\to\infty} \langle \alpha_p, \Delta_p\varphi \rangle_{L^2_p} \\ &= \lim_{p\to\infty} \langle \Delta_p\alpha_p, \varphi \rangle_{L^2_p} \\ &= \lim_{p\to\infty} \langle \lambda_p\alpha_p, \varphi \rangle_{L^2_p} \\ &= \langle \lambda\alpha, \varphi \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

α est ainsi une section propre L^2 pour Δ, associée à la valeur propre λ. Montrons enfin que α n'est pas nulle.

On choisit $\tilde{K}$ un compact qui contient le compact K de l'hypothèse (3) dans son intérieur, et ρ une fonction lisse sur M qui vaut 0 sur K, 1 sur un voisinage de $M \setminus \tilde{K}$ et telle que $\rho \leq 1$ sur M. On obtient, en utilisant l'identité (*) et l'hypothèse (3) :

$$\begin{aligned} \lambda_p \int_M \left[\rho^2 |\alpha_p|_p^2 + |d\rho|^2 |\alpha_p|_p^2\right] dv_{g_p} &= \langle \Delta_p(\rho\alpha_p), \rho\alpha_p \rangle_p \\ &\geq \lambda_0 \int_M \rho^2 |\alpha_p|_p^2 \, dv_{g_p}. \end{aligned}$$

Pour p assez grand, on déduit de l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 - \lambda_p &= (\lambda_0 - \lambda_p) \int_M |\alpha_p|_p^2 \, dv_{g_p} \\
&= (\lambda_0 - \lambda_p) \int_M \left[\rho^2 |\alpha_p|_p^2 + (1-\rho^2)|\alpha_p|_p^2\right] \, dv_{g_p} \\
&\leq |\lambda_p| \sup(|d\rho|^2) \int_{\tilde{K}} |\alpha_p|_p^2 \, dv_{g_p} + (\lambda_0 - \lambda_p) \int_M (1-\rho^2)|\alpha_p|_p^2 \, dv_{g_p} \\
&\leq (|\lambda_p| \sup(|d\rho|^2) + \lambda_0 - \lambda_p) \int_{\tilde{K}} |\alpha_p|_p^2 \, dv_{g_p}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand p tend vers l'infini, on obtient

$$\int_{\tilde{K}} |\alpha|^2 \, dv_g \geq \frac{\lambda_0 - \lambda}{|\lambda| \sup(|d\rho|^2) + \lambda_0 - \lambda} > 0,$$

ce qui prouve bien que α n'est pas nulle.

Passons au deuxième point. Soit λ un réel tel qu'il existe une section $\alpha \neq 0$ dans L^2, avec $\Delta\alpha = \lambda\alpha$, et $|\lambda| < \lambda_0$. Comme Δ agissant sur $C_0^\infty(M,E)$ est essentiellement auto-adjoint, il existe une suite $\alpha_m \neq 0$ dans $C_0^\infty(M,E)$ telle que

$$\|\Delta\alpha_m - \lambda\alpha_m\|_{L^2} \leq \frac{1}{m}\|\alpha_m\|_{L^2}.$$

Grâce aux hypothèses (1) et (2), pour m fixé, la suite $\Delta_p\alpha_m - \lambda\alpha_m$ tend uniformément vers $\Delta\alpha_m - \lambda\alpha_m$, donc on peut trouver une suite p_m d'entiers tendant vers l'infini telle que

$$\|\Delta_{p_m}\alpha_m - \lambda\alpha_m\|_{L^2_{p_m}} \leq \frac{2}{m}\|\alpha_m\|_{L^2_{p_m}}.$$

Ceci montre qu'il existe une suite de nombres λ_{p_m} dans $\sigma(\Delta_{p_m}) \cap [\lambda - 2/m, \lambda + 2/m]$, et cette suite tend vers λ. De plus, pour m assez grand, on a $|\lambda_{p_m}| < \lambda_0$, donc λ_{p_m} n'est pas dans le spectre essentiel (hypothèse (3)) ; c'est donc une valeur propre. □

Références

[A-S] Z. Ahmed et D. W. Stroock, *A Hodge theory for some non-compact manifolds*, J. Differential Geom., **54 n°1** (2000), 177-225.

[An] M. Anderson, *L^2 harmonic forms on complete Riemannian manifolds*, Geometry and Analysis on Manifolds (Katata/Kyoto, 1987), Lecture Notes in Math., **n° 1339**, 1-19.

[Ang] N. Anghel, *An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds*, Houston J. Math., **19 n°2** (1993), 223-237.

[A-P-S] M. F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I.*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **77** (1975), 43-69.

[B-B1] W. Ballmann, J. Brüning, *On the spectral theory of manifolds with cusps*, J. Math. Pures Appl., **80 n°6** (2001), 593-625.

[B-B2] W. Ballmann, J. Brüning, *On the spectral theory of surfaces with cusps*, prépublication.

[Ba] C. Bär, *The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume*, J. Differential Geom., **54 n°3** (2000), 439-488.

[Be] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987.

[B-H] O. Biquard, M. Herzlich, *A Burns-Epstein invariant for ACHE* $4-$*manifolds*, math.DG/0111218 A (2002).

[Bo-C] A. Borel et W. Casselman : L^2-*cohomology of locally symmetric manifolds of finite volume*, Duke Math. J., **66** (1992), 625-647.

[Br] J. Brüning, L^2-*index theorems on certain complete manifolds*, J. Differential Geom., **32** (1990), 491-532.

[C1] G. Carron, *Une suite exacte en* L^2-*cohomologie*, Duke Math. J., **95 n°2** (1998), 343-372.

[C2] G. Carron, *Théorèmes de l'indice sur les variétés non-compactes*, J. Reine Angew. Math., **541** (2001), 81-115.

[C3] G. Carron, *Un théorème de l'indice relatif*, Pacific J. Math., **198 n°1** (2001), 81-107.

[C4] G. Carron, L^2-*cohomology of manifolds with flat ends*, prépublication (2001).

[C5] G. Carron, *Formes harmoniques* L^2 *sur les variétés riemanniennes non compactes*, mémoire d'habilitation à diriger les recherches, Université Claude Bernard (Lyon I), 1999.

[Ch] P. Chernoff : *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Funct. Anal., **12** (1973).

[Co-C] B. Colbois, G. Courtois : *Convergence de variétés et convergence du spectre du laplacien*, Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., **IV. Sér. 24 n°4** (1991), 507-518.

[D] J. Dodziuk, L^2 *harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **77** (1979), 395-400.

[Do] H. Donnelly, *On the essential spectrum of a complete Riemannian manifold*, Topology, **20 n°1** (1981), 1-14.

[Do1] H. Donnelly, *The differential form spectrum of hyperbolic space*, Manuscripta Math., **33** (1981), 365-385.

[Do-F] H. Donnelly, Ch. Fefferman, *L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric*, Annals of math., **118** (1983), 593-618.

[Do-X] H. Donnelly, F. Xavier, *On the differential form spectrum of negatively curved riemannian manifolds*, Amer. J. Math., **106** (1984), 169-185.

[E] P. Eberlein, *Lattices in spaces on nonpositive curvature*, Annals of Math., **111** (1980), 435-476.

[E-F] J.F. Escobar, A. Freire, *The differential form spectrum of manifolds of positive curvature*, Duke Math. J., **69 n°2** (1993), 1-42.

[G] M. Gaffney : *A special Stokes' Theorem for complete Riemannian manifolds*, Ann. of Math., **60** (1954), 140-145.

[Gl] I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Daniel Davey, New York, 1966.

[Go] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[G-K-S] V. M. Gol'dshtein, V. I. Kuz'minov, I. A. Shvedov, *Reduced L_p-cohomology of warped cylinders*, Sib. Math. J., **31 n°5** (1990), 716-727 ; traduction du Sib. Mat. Zh. **31 n°5 (183)** (1990), 10-23.

[Gr] C. R. Graham, *Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Suppl. **63** (2000), 31-42.

[G-W] R. Greene, H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole, Springer-Verlag*, Lecture Notes in Math., **699** (1979), Berlin, Heidelberg, NY.

[Gro] M. Gromov, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Differential Geom., **33** (1991), 263-292.

[H-H-M] T. Hausel, E. Hunsicker, R. Mazzeo, *Hodge cohomology of gravitational instantons*, prépublication (2002).

[He-I] E. Heintze, H. C. Im Hof, *Geometry of horospheres*, J. Differential Geom., **12 n°4** (1977), 481-491.

[Ho] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math., **113**(1965), 89-152.

[Hi] N. Hitchin, *L^2-cohomology of hyperkähler quotients*, Comm. Math. Phys., **211** (2000), 153-165.

[L1] J. Lott, *The zero-in-the-spectrum question*, Enseign. Math., **II Sér. 42, n°3-4** (1996), 341-376.

[L2] J. Lott, *L^2-cohomology of geometrically infinite hyperbolic $3-$manifolds*, Geom. Funct. Anal., **n°1** (1997), 81-119.

[L3] J. Lott, *On the spectrum of a finite-volume negatively-curved manifold*, Amer. J. Math. **123 n°2** (2001), 185-205.

[M] R. Mazzeo, *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Differential Geom., **28 n°2** (1988), 309-339.

[M-M] R. Mazzeo, R. Melrose, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries*, Asian J. Math. **2 n°4** (1998), 833-866.

[M-P] R. Mazzeo, R. S. Phillips, *Hodge theory on hyperbolic manifolds*, Duke Math. J., **60 n°2** (1990), 509-559.

[O] T. Ohsawa, *Isomorphism theorems for cohomology groups of weakly $1-$complete manifolds*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **18** (1982), 191-231.

[O-T] T. Ohsawa, K. Takegoshi, *Hodge spectral sequence on pseudoconvex domains*, Math. Z., **197** (1988), 1-12.

[P] P. Pansu, *Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement*, prépublication.

[dR] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1960.

[R-S] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York (1972).

[S-Y] Y-T. Siu, S-T. Yau, *Compactification of negatively curved complete Kaehler manifolds of finite volume*, Semin. differential geometry, Ann. Math. Stud. **102** (1982), 363-380.

[T] M. E. Taylor, *Partial differential equations I,II*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1996).

[W] A. Weil, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1971.

[Y] N. Yeganefar, *Sur la L^2-cohomologie des variétés à courbure négative*, prépublication (2002).

[Yo] B. Youssin, *L^p cohomology of cones and horns*, J. Differ. Geom. **39 n°3** (1994), 559-603.

[Z1] S. Zucker, *L_2 Cohomology of Warped Products and Arithmetic Groups*, Inventiones Math., **70** (1982), 169-218.

[Z2] S. Zucker, *On the reductive Borel-Serre compactification : L^p-cohomology of arithmetic groups (for large p)*, Amer. J. Math., **123 n°5** (2001), 951-984.